Die Modulargleichungen der Galois'schen Moduln der 2. bis 5. Stufe.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doctorwürde

an der

Universität Leipzig

vorgelegt

von

Georg Friedrich.

Greifswald.

Druck von F. W. Kunike.

—

1886.

Vita.

Ich, Johannes Georg Friedrich, bin am 2. Februar 1862 zu Dresden-Neustadt als Sohn des verstorbenen Realschuloberlehrers Eduard Friedrich geboren und daselbst evangelisch-lutherischer Konfession getauft. Nachdem ich von Ostern 1868 bis Ostern 1872 die vierte Bürgerschule meiner Vaterstadt, und darauf bis Ostern 1880 das Realgymnasium ebendaselbst besucht und mit dem Zeugnis der Reife verlassen, studirte ich von Ostern 1880 bis Michaelis 1882 am Kgl. Polytechnikum zu Dresden Mathematik und hörte hier die Vorlesungen der Herren Professoren Harnack, Voss, Töpler, Zeuner, Burmester, Fuhrmann, Heger, Hempel, Hoffmann, Ruge, Schultze und Stern. Von Michaelis 1882 bis Michaelis 1885 studirte ich an der Universität Leipzig weiter und hörte die Vorlesungen der Herren Professoren Klein, Mayer, Hankel, Wundt, Dyck, Biedermann, Masius, Hoffmann. Allen diesen meinen Lehrern, insbesondere aber den Herren Professoren Harnack, Voss und Klein bin ich zu hohem Danke verpflichtet für die vielen Anregungen und Förderungen, die ich in den Vorlesungen und im persönlichen Verkehr mit ihnen für meine Studien erhalten habe.

Im Sommersemester 1885 habe ich mich vor der Kgl. Sächs. Prüfungskommission dem Examen pro facultate docendi in der mathematisch-physikalischen Sektion unterzogen.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545817_0206

Meinem hochverehrten Lehrer

Herrn Prof. Dr. Harnack

in Dresden

in Dankbarkeit gewidmet.

Die Modulargleichungen der Galois'schen Moduln der 2. bis 5. Stufe.

Von

Georg Friedrich.

Einleitung.

Die nachfolgenden Untersuchungen auf dem Gebiete der elliptischen Modulfunctionen beschäftigen sich mit der Aufstellung der Modulargleichungen für diejenigen ausgezeichneten Hauptmoduln der ϱten Stufe, welche nur bei den *modulo* ϱ zur Identität congruenten Substitutionen ihres Argumentes ω ungeändert bleiben. Moduln dieser Art existiren nur bis einschliesslich der fünften Stufe, und zwar sind es die von anderer Seite her wohlbekannten: das Doppelverhältniss, die Tetraederirrationalität, die Oktaederirrationalität nnd die Ikosaederirrationalität. Da diese vier Hauptmoduln sich bei linearen ω-Substitutionen selbst linear substituiren, so hat infolgedessen die Modulargleichung die Eigenschaft, in sich überzugehen, wenn der ursprüngliche und der transformirte Modul gleichzeitig gewissen linearen Substitutionen unterworfen werden. Von dieser Eigenschaft ausgehend kann man die zugehörigen Modulargleichungen in der Weise aufstellen, dass man zunächst untersucht, wie Ausdrücke dieser Substitutionseigenschaft im allgemeinen gebaut sein müssen; zur Aufstellung der fertigen Modulargleichung hat man dann nur noch wenige Zahlencoefficienten auszurechnen, was durch Einsetzen der von anderer Seite her gleichfalls bekannten, nach Potenzen von $q = e^{2i\pi\omega}$ fortschreitenden, Reihen für die Moduln ohne principielle Schwierigkeit geschieht.

Dieser Ansatz rührt von Herrn Professor Klein her, dem ich die Anregung zu diesen Untersuchungen verdanke, und ist von ihm in seinem Aufsatze „Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen“ (Mathem. Annalen Band XVII, Seite 69) im November 1879 zur Sprache gebracht worden. Die folgende Untersuchung, die sich die wirkliche Durchführung dieses Ansatzes zum Ziel gesteckt hat, gliedert sich in drei Teile. Im ersten Teil werden über die zu betrachtenden Moduln zunächst diejenigen Sätze zusammengestellt respective entwickelt, welche für die Theorie der zugehörigen Modulargleichungen nötig sind, und wird damit eine allgemeine Orientirung über die in Betracht kommenden Functionen gegeben. Zunächst wird die Existenz dieser und nur dieser vier ausgezeichneten Hauptmoduln aus dem Geschlecht des Fundamentalpolygones nachgewiesen. Darauf wird die Abhängigkeit der Moduln vom Hauptmodul der ersten Stufe, der absoluten Invariante $J(\omega)$ durch fertige Gleichungen angegeben. Diese Gleichungen haben die Eigenschaft, bei gewissen linearen Substitutionen in sich überzugehen, und diese Substitutionen sind, auf der Zahlenkugel interpretirt, Rotationen, welche gewisse Figuren in sich überführen, die mit den regulären Körpern in enger Beziehung stehen. Dadurch gewinnt die Theorie dieser Moduln Anschluss an die Theorie der Drehungen der regulären Körper, wie sie von Herrn Professor Klein in einer Reihe von Aufsätzen in den mathematischen Annalen, besonders im IX. Bande („Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich“) und dann neuerdings in dem Buche „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade“ dargelegt ist, welchem letzteren daher ein Teil der zur Verwendung gekommenen Formeln entnommen ist. Schliesslich werden dann noch im ersten Teile die linearen Substitutionen der Moduln und ihre Zuordnung zu den linearen ω-Substitutionen festgelegt. — Im zweiten Teile werden die besprochenen Moduln einer Transformation n. Ordnung unterworfen, wobei der Transformationsgrad n stets teilerfremd zur Stufe ϱ angenommen wird, da sich dadurch die Untersuchungen wesentlich vereinfachen, und werden dann die zugehörigen Modulargleichungen hinsichtlich Grad, Irreducibilität und Vertauschbarkeit des ursprünglichen und des transformirten Moduls untersucht. Weiter besitzt die Modulargleichung eine gewisse Anzahl simultaner Substitutionen des ursprünglichen und des transformirten Moduls, die die Gleichung in sich überführen, und wird dann weiter die Zuordnung dieser Substitutionen festgestellt. Hieran schliesst sich die Untersuchung der Ausdrücke, welche beide Moduln enthalten und bei den simultanen Substitutionen derselben in sich übergehen, eine Fragestellung, die durch Einführung homogener Veränderlicher sofort aufs Gebiet der doppeltbinären Formen führt. Durch einfache Schlüsse und Verwendung weniger Sätze der Inva-

riantentheorie gelingt es, für alle in Betracht kommenden Fälle nachzuweisen, dass die Modulargleichung aus einer endlichen Anzahl doppeltbinärer Formen rational zusammensetzbar ist. — Nachdem dieser Nachweis geführt ist, wird im dritten Teile die Untersuchung, entsprechend den vier Moduln, in vier parallel nebeneinandergehende Untersuchungen gespalten, in denen für jeden dieser Moduln ausgerechnete Formeln fürs volle Formensystem, und schliesslich fertige Modulargleichungen für die niedersten Transformationsgrade angegeben werden.

Die hier gefundenen Resultate finden sich bereits mitgeteilt in einer Note des Herrn Professor Klein „Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen" (Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Sitzung am 2. März 1885, Seite 79 ff.) Zugleich spreche ich noch an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Klein, meinen lebhaftesten Dank aus für die vielen Anregungen und Förderungen in meinen Studien, und insbesondere bei der vorliegenden Untersuchung.

Georg Friedrich.

Capitel I.

Galois'sche Hauptmoduln der zweiten bis fünften Stufe.

§ 1.

Die modulo ϱ zur Identität congruenten Substitutionen und ihre Fundamentalpolygone.

Die modulo ϱ zur Einheit congruenten ganzzahligen linearen Substitutionen der Determinante 1

$$\omega' = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

worin $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Ganzzahlen sein sollen, die den Congruenzen genügen

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{\varrho}, \qquad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{\varrho}$$

wofür im Folgenden auch kurz

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv 1 : 0 : 0 : 1 \pmod{\varrho}$$

geschrieben werden soll, bilden bekanntlich eine in der Gesamtheit der linearen ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1 enthaltene ausgezeichnete Untergruppe vom Index

$$P = \frac{\varrho^3}{x} \Pi\left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right) \tag{1}$$

wo Π über alle in ϱ enthaltenen Primzahlen σ zu erstrecken ist, und $x = 1$ für $\varrho = 2$, sonst $x = 2$.

Die Gesamtheit der linearen ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1 gibt Veranlassung zu einer Einteilung der ω-Ebene in Felder, die die ganze Ebene einfach und lückenlos überdecken, und deren jedes sich in jedes andere durch eine der ebenerwähnten Substitutionen überführen lässt. Diese Felder sind dadurch noch nicht völlig bestimmt und kann man als solche z. B. Figuren annehmen, welche aus zwei mit einer Seite aneinanderstossenden Kreisbogendreiecken mit Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, 0 bestehen, so dass sich die Ecken mit $\frac{\pi}{3}$ an den Stellen

$$\frac{\gamma + \delta\varrho}{\alpha + \beta\varrho} \left(\varrho = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right), \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

die Ecken mit $\frac{\pi}{2}$ an den Stellen

$$\frac{\gamma + \delta i}{\alpha + \beta i} (i = \sqrt{-1})$$

endlich die mit 0 auf der reellen Axe befinden[1]). Ebenso gilt auch jede in der Gesamtheit der linearen Substitutionen enthaltene Untergruppe, vom Index μ — also insbesondere auch die Eingangs erwähnte ausgezeichnete Untergruppe der modulo ϱ zur Identität congruenten Substitutionen — zu einer Gebietseinteilung Veranlassung, die so angeordnet werden kann, dass jedes Feld derselben, jedes sogenannte Fundamentalpolygon der Untergruppe, aus je μ Feldern der ersterwähnten Haupteinteilung besteht. Die μ Felder solch eines Polygones gehen aus irgend einem Felde der ω-Ebene durch ebensoviel Substitutionen hervor, von denen keine aus einer andern durch eine der Gruppe angehörige Substitution abgeleitet werden kann. Bei der im Folgenden ausschliesslich zu betrachtenden Gruppe der modulo

1) Ueber diese grundlegenden Sätze aus der Theorie der Modulfunctionen vergleiche man etwa Herrn Dedekind's „Schreiben über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen", Borchardt's Journal, t. 83. p. 265 ff.), ferner Herrn Hurmitz' Aufsatz: „Grundlagen zu einer independenten Theorie der Modulfunctionen und der zugehörigen Multiplicatorgleichungen". (Mathem. Annalen XVIII, p. 528 ff.), endlich vor allem Klein „Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen, Annalen XVII, p. 62 ff.

ϱ zur Identität congruenten Substitutionen bilden sie insbesondere ein „volles System modulo ϱ incongruenter Substitutionen"

$$\omega' = \frac{\gamma_k + \delta_k \omega}{\alpha_k + \beta_k \omega}$$

bei denen für kein Wertepaar kk' eine Relation

$$\alpha_k : \beta_k : \gamma_k : \delta_k \equiv \alpha_{k'} : \beta_{k'} : \gamma_{k'} : \delta_{k'} \pmod{\varrho}$$

existirt. Solcher Wertesysteme gibt es natürlich gerade P.

Die Kanten, welche das Fundamentalpolygon begrenzen, hangen vermittels der Substitutionen der Untergruppe paarweise zusammen. Durch stetiges Deformiren der Fläche im Sinne der *Analysis situs* und Zusammenfügen der entsprechenden Kanten erhält man eine geschlossene Fläche von gewissem Geschlecht, dem Geschlecht der Untergruppe [1]). Das Geschlecht p des Fundamentalpolygones für die modulo ϱ zur Einheit congruenten Substitutionen, des sog. Fundamentalpolygones der ϱten Stufe lässt sich mittels des Euler'schen Polyedersatzes

$$O + E = K - 2(p-1)$$

bestimmen, worin O die Zahl der Felder (Ebenen) des Polyeders, E die der Eckpunkte, K die der Kanten bedeutet, und sich diese Zahlen auf die ursprüngliche Einteilung des Polygones in P Felder beziehen. O ist also gleich P zu setzen. Diese P Felder (Doppeldreiecke) ergeben $K = \frac{3}{2} P$ Kanten. Bei der Bestimmung von E beachte man, dass wenn im Fundamentalpolygon an einer Stelle $\omega = \omega_0$ τ Felder zusammenhangen, dann an jeder äquivalenten Stelle

$$\omega' = \frac{\gamma + \delta \omega_0}{\alpha + \beta \omega_0}$$

je ebensoviel Felder zusammenhangen müssen. Denn üben wir zunächst eine lineare Substitution auf die ω-Ebene aus, so bedeutet sie auf der, durch das Deformiren erhaltenen, geschlossenen Fläche, (die wir uns vielleicht in der bekannten Weise als eine Kugel mit p Henkeln vorstellen) zufolge der einfachen, lückenlosen Ueberdeckung der ω-Ebene mit Fundamentalpolygonen, und da wir es eben mit einer ausgezeichneten Untergruppe zu tun haben, eine ganz bestimmte (d. h. eindeutige) Verschiebung und Vertauschung der Felder, so dass jedem Feld ein bestimmtes neues Feld entspricht und die gegenseitige Lage der Felder gegeneinander eben infolge der Natur der ausgezeichneten Untergruppe erhalten bleibt. Hangen also an einer

1) Annalen XVII, p. 65. Citate mit blosser Angabe der Seitenzahl und Bandzahl beziehen sich auf die Klein'schen Arbeiten,

Stelle τ Felder zusammen, so gehen diese τ Felder in τ andere über, die an einer Stelle, und geschlossen, zusammenhangen, so dass an dieser neuen Stelle nicht mehr und nicht weniger als τ Felder zusammenstossen können. Wenn wir jetzt die Zahl E bestimmen wollen, so ergeben die P Dreiecke mit Winkeln $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, 0 erstlich $2P$ Ecken mit Winkel $\frac{\pi}{3}$. Da von diesen je sechs in einem Punkte zusammenstossen, wie sich leicht aus der Betrachtung des Fundamentalpolygons ergibt, so liefern diese $2P$ Dreieckszipfel insgesamt $\frac{1}{3}P$ Punkte. Die noch übrigen P Ecken gruppiren sich in Cyklen zu ϱ; denn wenn $\omega = i\infty$ ein Eckpunkt des Fundamentalpolygones ist, so hangen dort wegen der Substitution

$$\omega' = \omega + \varrho \,(\equiv 1 \bmod \varrho)$$

ϱ Dreiecke mit der, dem Winkel 0 entsprechenden Ecke im Cyklus zusammen, und ergeben sich so $\frac{P}{\varrho}$ Punkte, so dass E gleich $\frac{P}{3} + \frac{P}{\varrho}$ wird. Daher ist

$$2(p-1) = K - O - E = \tfrac{3}{2}P - P - \tfrac{1}{3}P - \frac{1}{\varrho}P,$$

$$p = 1 + \frac{\varrho - 6}{12\varrho}P.$$

Ist ϱ Primzahl, also

$$P = \frac{\varrho^3}{x}\left(1 - \frac{1}{\varrho^2}\right),$$

so wird für $\varrho > 2$

$$p = \frac{(\varrho+2)(\varrho-3)(\varrho-5)}{24}$$

und dies ist null für $\varrho = 3$ und $\varrho = 5$. Ist ϱ nicht Primzahl, so wird

$$p = 1 + \frac{\varrho^2(\varrho-6)}{24}\,\Pi\left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right),$$

und dies ist für $\varrho \geqq 6$ sicher grösser als null. $\varrho = 4$ ergibt, wie leicht zu verificiren, $p = 0$, ebenso noch $\varrho = 2$.

Das Fundamentalpolygon für die modulo ϱ zur Einheit congruenten Substitutionen hat also nur in den Fällen $\varrho = 2, 3, 4, 5$ das Geschlecht Null.

§ 2.

Die zugehörigen Hauptmoduln der 2. bis 5. Stufe.

Wenn das Fundamentalpolygon das Geschlecht Null hat, so kann man stets eine einfachste Function annehmen, die im gesamten Fundamentalpolygon jeden Wert nur einmal annimmt [1]). Diese Function bezeichnet man als einen zur Untergruppe gehörigen Hauptmodul. Sei m solch ein Hauptmodul, so ist natürlich jede lineare Function desselben $m' = \frac{am+b}{cm+d}$ (wobei a, b, c, d nicht reelle ganze Zahlen zu sein brauchen), ein ebenso berechtigter Hauptmodul, und da m' von drei willkürlichen Constanten (den Verhältnissen $a:b:c:d$) abhängt, so kann man m', und somit dem bei der Betrachtung zu Grunde zu legenden Hauptmodul noch an drei bestimmten Stellen des Fundamentalpolygones beliebige Werte vorschreiben. Als Function von ω betrachtet, bleibt der Hauptmodul bei allen zur Untergruppe gehörigen ω-Substitutionen ungeändert. Die Moduln, welche zu der ausgezeichneten Untergruppe der *modulo* ϱ zur Identität congruenten Substitutionen gehören, bezeichnet man aus einem später noch anzuführenden Grunde als Galois'sche Moduln. Galois'sche Hauptmoduln existiren also nur bis einschliesslich für die fünfte Stufe.

Alle Functionen von ω, welche bei den nämlichen Substitutionen ungeändert bleiben, und im Fundamentalpolygon keine wesentlichen Singularitäten zeigen, drücken sich rational durch die zu dieser Substitutionsgruppe gehörigen Hauptmoduln aus. Insbesondere ist der Hauptmodul J, der bei allen ω-Substitutionen ungeändert bleibt, durch jeden Galois'schen Hauptmodul der ϱten Stufe rational darstellbar. ($J(\omega)$ ist bekanntlich die absolute Invariante des elliptischen Integrals erster Gattung mit dem Periodenverhältniss ω und identisch mit der Valenz des Herrn Dedekind [2])). J nimmt in jedem der P Felder des Fundamentalpolygones jeden Wert je einmal an, jedem Wert J entsprechen also P Punkte des Polygones der ϱten Stufe, also auch P Werte des Hauptmoduls m, der etwa, um die Ideen zu fixiren, so festgelegt sei, dass den drei Werten ω_0, ω_0', ω_0'' die Werte m_0, m_0', m_0'' von m entsprechen. Umgekehrt gehört zu jedem Werte m ein Wert J und besteht daher zwischen m und J eine Gleichung von der Form

$$J.\varphi(m)+\psi(m)=0,$$

1) Vergl. Annalen XVII, p. 64.

2) Vergl. Annalen XIV, p. 112, 120. XVII, p. 65 und Dedekind Crelle's Journal t. 83, pg. 274.

worin φ und ψ ganze rationale Functionen Pter Ordnung von m bedeuten. Diese Gleichung muss für die zu $\omega = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ äquivalenten Werte ω, d. h. für $J = 0$ lauter dreifache Wurzeln m ergeben. Denn nähert sich J dem Werte null, so rücken die entsprechenden Punkte ω zu dreien in die zu $\omega = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ äquivalenten Punkte zusammen, d. h. werden je drei der zu einem bestimmten Werte J gehörigen Werte m einander gleich. Ebenso sieht man ein, dass diese Gleichung für $J = 1$ lauter Doppelwurzeln und für $J = \infty$ ($\varphi = 0$) lauter ϱ fache Wurzeln ergeben muss. Diese Eigenschaften zusammenfassend kann man daher die zwischen J und m bestehende Gleichung in der Form schreiben

$$J : (J-1) : 1 = F_1(m)^3 : F_2(m)^2 : F_3(m)^\varrho \qquad (2)$$

F_1, F_2, F_3 sind darin ganze Rationalfunctionen der Ordnungen $\frac{1}{3}P$, $\frac{1}{2}P$, $\frac{1}{\varrho}P$ zwischen denen die Identität bestehen muss

$$F_1{}^3 = F_2{}^2 + F_3{}^\varrho$$

Diese Gleichung (2) hat eine wesentliche Eigenschaft, welche ein Mittel an die Hand gibt, die Functionen von F_1, F_2, F_3 für die verschiedenen Stufen aufzustellen.

Durch diese Gleichung wird nämlich eine conforme Abbildung der P-blättrigen J-Ebene auf die einblättrige m-Ebene veranlasst. Die Blätter der ersteren hangen bei $J = 0$ in Cyklen zu 3, bei $J = 1$ zu je 2, bei $J = \omega$ in Cyklen zu je ϱ Blättern zusammen. Weitere Verzweigungen sind nicht möglich, da sonst das Geschlecht der Fläche nicht null sein könnte. Die J-Fläche ist also regulär verzweigt, die zu einem Werte J gehörigen P Werte m stellen die P Functionen dar, die in den J-Ebenen gleichverzweigt sind, sich also rational durcheinander darstellen. Da sich jeder Zweig durch jeden andern und umgekehrt rational darstellt, so kann diese Abhängigkeit nur linear sein, d. h. die einzelnen P Functionen m hangen mittels linearer Substitutionen zusammen. Diese linearen Substitutionen bilden eine Gruppe von P Operationen (die identische Operation $m' = m$ mitgezählt). Da bei diesen Substitutionen der Wert von J nicht geändert wird, so folgt:

Die Gleichung (2) geht bei P linearen Substitutionen des m in sich über.

Da weiter jede lineare (ganzzahlige) ω-Substitution zwar den Wert J ungeändert lässt, den Wert m aber im allgemeinen ändert, so folgt:

Die Galois'schen Hauptmoduln der 2. bis 5. Stufe substituiren sich linear, wenn ihr Argument ω ganzzahligen linearen Substitutionen der Determinante 1 unterworfen wird.

§ 3.

Weitere Discussion und Aufstellung der Definitionsgleichungen für die zu betrachtenden Hauptmoduln.

Um einen weiteren Aufschluss über die Gleichung (2) zu erhalten, betrachten wir die durch sie hervorgerufene conforme Abbildung der P-blättrigen J-Ebene auf die einblättrige m-Fläche. Diese Abbildung ist überall conform, mit Ausnahme der $J = 0,\ 1,\ \infty$ entsprechenden Stellen der m-Ebene, deren Werte m sich aus $F_1(m) = 0$, respective $F_2 = 0$ oder $F_3 = 0$ ergeben. Zerschneiden wir jetzt die J-Ebene längs der reellen Axe in P positive und ebenso viel negative Halbblätter, und denken uns etwa die ersteren schraffirt, so haben wir in der m-Ebene eine Einteilung in P schraffirte und ebensoviel nicht schraffirte Felder. Die Begrenzungslinien derselben müssen im allgemeinen stetig verlaufen, d. h. dürfen keine Ecken zeigen, mit Ausnahme der $J = 0, 1, \infty$ entsprechenden Stellen, an denen sich Ecken mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\varrho}$ bilden.

Nun geht Gleichung (2) bei P linearen Substitutionen des m in sich über. Dabei werden die Werte J erhalten, die Blätter der J Ebene jedoch vertauscht. Für die m-Ebene bedeuten diese linearen Substitutionen lineare Transformationen, bei denen die P schraffirten Felder der Gebietseinteilung ineinander übergeführt, untereinander vertauscht werden; ebenso werden natürlich die nichtschraffirten Felder vertauscht. Diese Vertauschungen bilden ebenso, wie die linearen Transformationen von Gleichung (2) in sich, eine Gruppe.

Interpretiren wir jetzt die Werte von m auf der Zahlenkugel, so bedeuten die linearen Transformationen Rotationen um die beiden bei der betreffenden Transformation festbleibenden Punkte, Rotationen der Kugel um die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte als Axe. Sollen eine Anzahl solcher Rotationen eine Gruppe bilden, so müssen sich die Axen derselben in einem Punkte des Kugelinneren schneiden [1]). Durch eine lineare Transformation der Kugel — und diese

1) Annalen IX, pg. 186 ff.

ist irrelevant, da ja eben m noch linearen Transformationen beliebig unterworfen werden kann — kann man dann noch erreichen, dass der gemeinsame Axenschnittpunkt in den Kugelschnittmittelpunkt fällt.

Die Substitutionen von Gleichung (2) in sich bedeuten daher, auf der Zahlenkugel interpretirt, Rotationen der Kugelfläche um centrale Axen.

Bei diesen Rotationen wird jedes Feld in ein congruentes übergeführt, d. h. die P schraffirten Felder der Kugeleinteilung sind unter sich congruent, und ebenso die P nicht schraffirten.

Was die gegenseitige Lage dieser Felder betrifft, so folgt aus der regulären Verzweigung der J-Ebene, dass an den $F_1(m) = 0$ entsprechenden Stellen abwechselnd je drei schraffirte und ebensoviel nicht schraffirte Felder im Cyklus zusammenhangen, ebenso an den $F_2(m) = 0$ entsprechenden Ecken 2 schraffirte und 2 nicht schraffirte mit Winkeln $\frac{\pi}{2}$, endlich an den Stellen $F_3(m) = 0$ je 2 Felder.

Jetzt greife man eines dieser dreieckigen Felder heraus, etwa ein der positiven J-Halbebene entsprechendes (schraffirtes) und verbinde die drei Ecken durch Hauptkreisbögen. Dann lässt sich stets, und zwar, wie Herr Schwarz gezeigt hat[1]), mittels eines gewissen Quotienten zweier hypergeometrischen Reihen, der mit s bezeichnet sei, die positive J-Halbebene auf dieses Kreisbogendreieck auf eindeutige Weise conform abbilden, so dass den Punkten $J = 0,\ 1,\ \infty$ gerade die Ecken des Dreiecks entsprechen. In den durch Spiegelung des Dreiecks an den Seiten erhaltenen symmetrischen Dreiecken, die natürlich dieselben Winkel tragen, nimmt dann J vermöge derselben conformen Abbildung jeden der negativen J Halbebene angehörigen Wert einmal an, d. h. es wird die gesamte J-Ebene auf ein Doppeldreieck abgebildet. Durch diesen Spiegelungsprocess kann die Function $s(J)$ über das Doppeldreieck hinaus weiter analytisch fortgesetzt werden.

Wir haben nun nur noch einzusehen, dass die Fortsetzung der Function s durch Spiegelung an den Seiten der Kreisbogendreiecke identisch ist mit der Fortsetzung der Function $m(J)$ über die reelle J-Axe durch Spiegelung, d. h. haben einzusehen, dass die Felder der

1) Ueber diejenigen Fälle, in denen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres 4. Argumentes darstellt. (Crelle's Journal t. 75, pg. 311).

Kugeleinteilung Kreisbogendreiecke sind. Hätte die Gleichung (2) lauter reelle Coefficienten, so wäre das selbstverständlich, da dann unter den Begrenzungslinien der Kugelfelder der der reellen m-Axe entsprechende Hauptkreis ist, (denn reellen Werten m entsprechen dann reelle Werte J) und daher infolge der Kugelrotationen alle Seiten der Kugelfelder Kreisbogendreiecke sind.

Vervielfältigen wir jetzt das ebenbeschriebene Kreisbogendreieck durch die P Rotationen, welche die Felder der ursprünglichen Gebietseinteilung ineinander überführten, so entsteht auf der Kugel ein Netz von P Dreiecken. Diese mögen die Winkel α, β, γ haben, entsprechend den Stellen, wo die dreieckigen Felder die Winkel $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\varrho}$ aufweisen; dann müssen die Zwischenräume zwischen den entsprechenden Dreieckszipfeln die Winkel $\frac{2\pi}{3} - \alpha$, $\pi - \beta$, $\frac{2\pi}{\varrho} - \gamma$ haben zufolge der Periodicität der Kugeldrehungen, welche den betreffenden Punkt festlassen. Die Zwischenräume zwischen den Dreiecken entsprechenden nicht schraffirten Gebieten der ersten Kugeleinteilung, und müssen untereinander congruent sein, da sie durch die Kugelrotationen gleichfalls auseinander hervorgehen, und sind der Zahl nach gleichfalls P. Sie sind sicher Kreisbogendreiecke, da die Winkel $\frac{2\pi}{3} - \alpha$, $\pi - \beta$, $\frac{2\pi}{\varrho} - \gamma$ je P mal auftreten, und ausser diesen $3P$ Winkeln keine weiteren für die P congruenten Kreisbogenpolygone der Zwischenräume vorhanden sind. Da weiter die Seiten dieser Zwischendreiecke gleich denen der Dreiecke mit den Winkeln α, β, γ sein müssen, so ist das nicht anders möglich, als so, dass die Zwischendreiecke dieselben Winkel haben, wie die ersteren Dreiecke, d. h. die Winkel $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{\varrho}$. Die Zwischendreiecke sind den anderen Dreiecken natürlich nicht congruent, sondern symmetrisch. Wir erhalten also dieselbe Kugeleinteilung, wenn wir das erste angenommene Kreisbogendreieck, das die Winkel $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\varrho}$ hat, durch die P Rotationen vervielfältigen, oder, wenn wir durch Spiegelung die Function s fortsetzen. Da die $2P$ durch Spiegelung erhaltenen Dreiecke die Kugel lückenlos überdecken, so bildet die Function s die P-blättrige J-Ebene conform und eindeutig auf die einfach überdeckte Kugel ab. Jedem Punkte der J-Ebene entspricht ein Punkt s und ebenso ein Punkt m auf der Kugel, d. h. jedem Zahlenwerte s entspricht ein Wert m und umgekehrt jedem Werte m ein Wert s. Daher müssen m und s durch eine bilineare Gleichung verbunden sein, und wir können statt m ebensogut auch s als den

Galois'schen Modul der ϱten Stufe betrachten. (Da übrigens s so gewählt werden kann, dass in den drei Ecken eines Dreiecks $m = s$ wird, so sind m und s sogar direct identisch). Hieraus folgt:

Durch Gleichung (2) werden die $2P$ Halbblätter der JEbene auf $2P$ congruente resp. symmetrische Dreiecke der Zahlenkugel abgebildet.

In der Zahlenebene für m erhält man eine Gebietseinteilung in $2P$ Kreisbogendreiecke, die durch Spiegelung (Transformation mittels reciproker Radien) an den Seiten auseinander hervorgehen. Durch die Substitutionen, die Gleichung (2) in sich überführen, werden diese Felder untereinander vertauscht.

Wir beachten noch, dass jeder Kugelkreis, von dem ein Stück bei dieser Einteilung zur Verwendung kommt, vollständig auf der Kugel zur Einteilung benutzt wird, da an jeder Ecke nur Winkel der nämlichen Grösse auftreten, und zu jedem der dort zusammenstossenden Kreisbögen ein anderer gefunden werden kann, der mit ihm den Winkel π bildet. Diese Kreise auf der Kugel sind Bilder der reellen Axe der J-Ebene.

Die Einteilung der Kugel in die $2P$ Dreiecke wird viel übersichtlicher, wenn wir die Dreiecke in gewisser Weise zusammenfassen. Greifen wir nämlich die Punkte heraus, an denen je 6 Dreiecke $\left(\text{mit Winkel } \frac{\pi}{3}\right)$ zusammenstossen, so vereinigen sich diese 6 Dreiecke zu einem grösseren, gleichseitigen sphärischen Dreiecke mit den drei Winkeln $\frac{2\pi}{\varrho}$. Denn zunächst setzt sich an die dem Winkel $\frac{\pi}{\varrho}$ gegenüberliegende Seite ein symmetrisches Dreieck an, und diese beiden bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{\varrho}, \frac{\pi}{\varrho}, \frac{2\pi}{3}$, und solcher Dreiecke stossen in jeder Ecke mit Winkel $\frac{2\pi}{3}$ je drei zusammen und bilden eben das gleichseitige Dreieck mit den Winkeln $\frac{2\pi}{\varrho}$. Auf diese Weise erhalten wir eine neue Kugeleinteilung in $\frac{1}{3}P$ gleichseitige, congruente Dreiecke, von denen in jeder Ecke je ϱ zusammenstossen. Bei der dritten Stufe erhalten wir auf diese Weise aus den 24 Dreiecken mit Winkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ zwei verschiedene vollständige Einteilungen, die die Kugel einfach, aber vollständig bedecken.

Im Falle $\varrho = 2$ erhalten wir zwei congruente Dreiecke mit Winkeln π, π, π, d. h. zwei Halbkugeln, die in je sechs congruente Teile durch die Kreisbögen geteilt sind, die von den Polen des die Halbkugeln trennenden Hauptkreises unter Winkeln von $\frac{\pi}{3}$ gegeneinander geneigt ausgehen. Von den sechs äquidistanten Aequatorpunkten betrachte man drei um $\frac{2\pi}{3}$ entfernte als Eckpunkte des Dreiecks; sie sind durch $F_3(m) = 0$ bestimmt. Die drei zwischenliegenden Aequatorpunkte haben die Bedeutung der Seitenmitten und sind durch $F_2(m) = 0$ bestimmt, endlich die Pole sind durch $F_1(m) = 0$ gegeben.

In den Fällen $\varrho = 3, 4, 5$ haben wir auf der Kugel respective 4, 8, 20 congruente Dreiecke, von denen an jeder Ecke gerade 3, 4, respective 5 zusammenstossen, und es ist nicht schwer einzusehen, dass solch eine Kugeleinteilung mit der Kugeleinteilung identisch sein muss, die man erhält, wenn man ein reguläres Tetraeder, respective Oktaeder oder Ikosaeder, central auf die umbeschriebene Kugel projicirt. Zugleich erkennt man, da die Eckpunkte dieser Einteilung denjenigen Stellen der ursprünglichen Einteilung entsprechen, wo Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{\varrho}$ zusammenstiessen, dass die Ecken der obenerwähnten regulären Körper durch $F_3(m)$ gegeben sind. $F_2(m)$ verschwindet an den Stellen, wo der Winkel $\frac{\pi}{2}$ auftritt, d. h. ergibt, gleich Null gesetzt, die Kantenmitten der regulären Körper und endlich $F_1(m) = 0$ stellt die Flächenmitten oder präciser die Centralprojectionen der Flächenmitten unserer regulären Körper auf die Kugel dar.

Es ist hiernach nicht schwer, bei geeigneter Fixirung der Lage der regulären Körper gegen das Coordinatensystem die Functionen F_1, F_2, F_3 für die vier Stufen wirklich aufzustellen und sei in Bezug darauf auf das bereits erwähnte Buch des Herrn Klein, insbesondere auf Seite 47. ff. und 60. verwiesen, in welchem jedoch die F_1, F_2, F_3 entsprechenden Formeln auf anderem Wege abgeleitet werden, nämlich aus den Substitutionen, die den Rotationen analytisch entsprechen. Wir werden bei den folgenden Untersuchungen der Gleichung (2) die nachstehenden Gestalten für die verschiedenen Stufen geben, wobei wir noch homogene Variabeln m_1, m_2 $\left(\frac{m_1}{m_2} = m\right)$ einführen, um den Punkt $m = \infty$ nicht auszuzeichnen.

Für die zweite Stufe erhalten wir, wenn wir den Modul der zweiten Stufe mit $\delta = \frac{\delta_1}{\delta_2}$ bezeichnen:

$$J : J-1 = 4\delta_1{}^3 d_2{}^3 : -(\delta_1{}^3 - \delta_2{}^3)^2 : (\delta_1{}^3 + \delta_2{}^3)^2.$$

Gewöhnlich betrachtet man jedoch als Galois'schen Hauptmodul der 2- Stufe nicht die eben definirte Function δ, die man als Diëderirrationalität bezeichnen könnte, sondern das zur absoluten Invariante J gehörige Doppelverhältniss λ, dessen Abhängigkeit von J sich mittels der Gleichung ausdrücken lässt[1]):

$$J : J-1 : 1 = 4(\lambda_1{}^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2{}^2)^3 : (2\lambda_1{}^3 - 3\lambda_1{}^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2{}^2 + 2\lambda_2{}^3)^2 : 27(\lambda_1{}^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2{}^2)^2 \quad (3a)$$

δ und λ hangen linear miteinander zusammen und kann man dieser Abhängigkeit wegen der Sechswertigkeit von δ und λ 6 verschiedene Formen geben.

Für die dritte Stufe verwenden wir die Gleichung:

$$J : J-1 : 1 = 64(a_1{}^3 a_2 - a_2{}^4)^3 : -(a_1{}^6 - 20a_1{}^3 a_2{}^3 - 8a_2{}^6)^2 : (a_1{}^4 + 8a_1 a_2{}^3)^3; \quad (3b)$$

für die vierte Stufe:

$$J : J-1 : 1 = (o_1{}^8 + 14\, o_1{}^4 o_2{}^4 + o_2{}^8)^3 : (o_1{}^{12} - 33 o_1{}^8 o_2{}^4 - 33 o_1{}^4 o_2{}^8 + o_2{}^{12})^2 : 108(o_1{}^5 o_2 - o_1 o_2{}^5)^4 \quad (3c)$$

endlich für die fünfte Stufe:

$$J : J-1 : 1 = (-\eta_1{}^{20} + 228\eta_1{}^{15}\eta_2{}^5 - 494\eta_1{}^{10}\eta_2{}^{10} - 228\eta_1{}^5\eta_2{}^{15} + \eta_2{}^{20})^3 : -(\eta_1{}^{30} + 522\eta_1{}^{25}\eta_2{}^5 - 10005\eta_1{}^{20}\eta_2{}^{10} - 10005\eta_1{}^{10}\eta_2{}^{20} - 522\eta_1{}^5\eta_2{}^{25} + \eta_2{}^{30})^2 : 1728(\eta_1{}^{11}\eta_2 + 11\eta_1{}^6\eta_2{}^6 - \eta_1\eta_2{}^{11})^5 \quad (3d)$$

Die Gleichungen (3*b*), (3*c*), (3*d*) sind als Tetraedergleichung, Oktaedergleichung, Ikosaedergleichung, die Grössen $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$, $\omega = \frac{o_1}{o_2}$, $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ als Tetraederirrationalität, Oktaederirrationalität, Ikosaederirrationalität bekannt. Die P linearen Substitutionen, welche die Gleichungen (3a) bis (3d) in sich überführen, sollen im Folgenden auch kurz als „Substitutionen der ϱten Stufe" bezeichnet werden.

---

1) Man vergleiche z. B. Annalen XIV, p. 114., oder Dedekind in Crelle's Journal t. 83, pg. 284. Die dort mit $v = \mathrm{val}(\omega)$ bezeichnete Grösse ist mit der absoluten Invariante J identisch.

Wir schliessen hieran einige Bemerkungen, die die Stellung der soeben durchgeführten Betrachtungen zu früheren Untersuchungen kennzeichnen sollen. Zunächst hätte man die Gleichungen (8) noch kürzer ableiten können, wenn man auf den im bereits erwähnten Buche „Theorie des Ikosaeders u. s. w." mitgeteilten Beweis (pg. 115. ff.) Bezug nahm, dass es nur fünf endliche Gruppen linearer Substitutionen gibt, nämlich die cyklische Gruppe, die Diëdergruppe, Tetraedergruppe, Oktaedergruppe und Ikosaedergruppe. Man sieht leicht ein, dass die P Substitutionen der ϱten Stufe keine cyklische Gruppe bilden können, und nur im Falle $\varrho=2$ eine Diëdergruppe, dass daher Gleichung (2) für $\varrho = 3, 4, 5$ durch eine Gruppe von Tetraedersubstitutionen, Oktaedersubstitutionen respective Ikosaedersubstitutionen in sich übergeht, und dass daher Gleichung (2) für die zweite Stufe die Bedeutung einer gewissen Diëdergleichung, für die dritte Stufe die einer Tetraedergleichung u. s. w. hat. Dann kann man (l. c. pg. 49, 60) für diese Gleichungen Formeln, wie die Gleichungen (3) angeben. Weiter vergleiche man Annalen XIV. pg. 148 ff. Dort zeigt Herr Klein, dass die Galois'sche Resolvente der Transformationsgleichung der Transformation n-Ordnung der absoluten Invariante J nur in den Fällen $n = 2, 3, 4, 5$, das Geschlecht null hat, dass sie weiter in diesen Fällen die gleiche Verzweigung hat, wie die Doppelverhältsnissgleichung, respective Tetraedergleichung, Oktaedergleichung oder Ikosaedergleichung, und dass diese Gleichungen die einfachsten Formen sind, die man der Galois'schen Resolvente der Transformationsgleichung der Transformation 2. bis 5. Ordnung von J erteilen kann. Beachtet man noch, dass die Gleichungen (3) ihre eigenen Galois'schen Resolventen sind (vergl. Ikosaeder, pg. 92.), so ist damit auch die Bezeichnung „Galois'sche" Moduln erklärt. Weiter werden in dem erwähnten Aufsatze noch Formeln angegeben, welche direct den Uebergang von den Transformationsgleichungen für J zu den Galois'schen Resolventen vermitteln, und schliesslich werden aus diesen Formeln für die vier einzelnen Irrationalitäten explicite Potenzreihen abgeleitet, die nach Potenzen von $q = e^{i\pi\omega}$ fortschreiten.

Um endlich m auch als Function von ω zu betrachten, zeichne man sich die Fundamentalpolygone der vier Stufen, indem man etwa in der ω-Ebene $2P$ Dreiecke in entsprechender Weise an einandersetzt, wie die $2P$ Felder auf der Kugel aneinandergesetzt sind. Man erhält so ein noch in vieler Hinsicht willkürliches Fundamentalpolygon, dessen Kanten sich dann durch modulo ϱ zur Identität congruente Subsitutionen binden müssen, und dem man etwa die in der Figurentafel angegebenen Formen geben kann (Fig. 2. für die 2. Stufe, Fig. 3. und 4. für die 3. und 4. Stufe, das Polygon für die

5. Stufe besteht aus fünf congruenten nebeneinander gelegten Teilen wie Fig. 5.). Je nachdem man irgend eines der P Doppeldreiecke der ω-Ebene einem der P Doppeldreiecke der m-Ebene zuordnet (beide Doppeldreiecke bestehen aus einem schraffirten und einem nicht schraffirten Dreieck, die an der dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ gegenüberliegenden Seite aneinander hangen), erhält man P verschiedene Functionen von ω, die dann eindeutig in der gesamten ω-Ebene fortsetzbar sind, und nach dieser einmaligen Zuordnung eines Wertepaares (m, ω) eindeutige Functionen von ω darstellen, die nicht gegeneinander verzweigt sind. (Die Function $m(J)$ ist jedoch P-deutig und sind auch ihre einzelnen Zweige bei $J = 0, 1, \infty$ gegeneinander verzweigt).

§ 4.

Genauerer Verfolg der vier einzelnen Modulfunctionen.

I. Das Doppelverhältniss war durch die Gleichung definirt:

$$J:J-1:1 = 4(\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2)^3:(2\lambda_1^3-3\lambda_1^2\lambda_1-3\lambda_1\lambda_2^2+2\lambda_2^3)^2 \\ :(\lambda_1^2\lambda_2-\lambda_1\lambda_2^2)^2 \qquad (3a)$$

Merkwürdige Punkte der λ-Ebene sind die Punkte $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ entsprechend $J=0$) mit der Multiplicität 2, sowie $\lambda = 0, 1, \infty$ (entsprechend $J=\infty$) und $\lambda = -1, \frac{1}{2}, 2$ (entsprechend $J=1$) mit der Multiplicität 1. Verbindet man diese Punkte unter Beachtung ihrer Multiplicität durch Kreise und beachtet, dass auch die reelle λ-Axe in die Abbildungsfigur eingehen muss, so erhält man unschwer die Gebietseinteilung der λ-Ebene. (Vergl. Tafel, Figur 1). Bezeichnet man das schraffirte Dreieck mit den Ecken $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, 1 als Dreieck I, so geht das Dreieck mit den Ecken 2, $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, 1 aus ihm durch die Substitution $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$ hervor, die mit A bezeichnet sei, ebenso das Dreieck mit Ecken $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, 0 durch die Substitution $\lambda' = 1-\lambda$, die mit B bezeichnet sei. Die übrigen Dreiecke entstehen aus I durch die Substitutionen ABA, AB, BA, oder in λ ausgedrückt $\lambda' = \frac{\lambda}{\lambda-1}$, respective $= \frac{\lambda-1}{\lambda}$ und $\frac{1}{1-\lambda}$. Das Symbol AB soll dabei besagen dass auf λ erst die Substitution A, und dann B auf $A(\lambda)$ ausgeübt werden soll, also $B(A(\lambda))$. Daher muss man bekanntlich bei dieser Bezeichnungsweise consequenter $(\lambda)AB$ schreiben, welcher Schreibweise wir uns im Folgenden anschliessen wollen.

Schreiben wir die Substitution der Gleichung (3a) in sich homogen in der Form

$$\lambda_1' = a\lambda_1 + b\lambda_2, \qquad \lambda_2' = c\lambda_1 + d\lambda_2,$$

wobei die noch bis auf einen gemeinsamen Factor unbestimmten Zahlen a, b, c, d so normirt sein sollen, dass $ad - bc = 1$, so lauten die „Doppelverhältniss-Substitutionen" homogen

(4)

$\lambda_1' = \pm\lambda_1$, $\lambda_2' = \pm\lambda_2$. entsprechend der Identität 1, $\lambda' = \lambda$

$\lambda_1' = \pm i\lambda_2$, $\lambda_2' = \pm i\lambda_1$ „ „ Operation A, $\lambda' = \frac{1}{2}\lambda$;

$\lambda_1' = \pm i(-\lambda_1 + \lambda_2)$, $\lambda_2' = \pm i\lambda_2$ „ „ „ B, $\lambda' = 1 - \lambda$;

$\lambda_1' = \pm i\lambda_1$, $\lambda_2' = \pm i(\lambda_1 - \lambda_2)$, „ „ ABA, $\lambda' = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$;

$\lambda_1' = \pm(\lambda_1 - \lambda_2)$, $\lambda_2' = \pm\lambda_1$, „ „ AB, $\lambda' = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$;

$\lambda_1' - \pm\lambda_2$, $\lambda_2' = \pm(-\lambda_1 + \lambda_2)$, „ „ BA, $\lambda' = \frac{1}{1 - \lambda}$.

In der Abbildungsfigur ist in den einzelnen Feldern die Operation angegeben, durch welche sie aus dem mit I bezeichneten hervorgehen. Die Gestalt des Fundamentalpolygones der zweiten Stufe ist von anderer Seite her bekannt (Vergl. Tafel, Fig. 2.). Bezeichnet man

die Operation $\omega' = \omega + 1$ mit S,

die Operation $\omega' = -\frac{1}{\omega}$ mit T,

so gehen die einzelnen Felder aus dem mit I bezeichneten Ausgangsfeld, (das die Ecken $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $+\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $i\infty$ hat), durch die ihnen eingeschriebene Operation hervor.

Jedem Punkt ω des Fundamentalpolygones entsprechen 6 Punkte $\lambda(\omega)$, jedem äquivalenten Punkte $\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$ dieselben sechs Punkte λ. Ordnet man aber einem Werte ω einen bestimmten Wert $\lambda(\omega)$ zu und geht vom Punkte ω auf irgend einem Wege zum äquivalenten Punkte $\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$ über, so geht λ vermöge der conformen Abbildung der ω-Ebene auf die λ-Ebene in einen ganz bestimmten (im allge-

meinen andern) der ebenerwähnten 6 Werte λ über. Um die sechs Functionen $\lambda(\omega)$ zu unterscheiden, verabreden wir, dass die Function λ, welche das mit I bezeichnete Feld der ω-Ebene auf das mit C bezeichnete Feld der λ-Ebene abbildet, (C bedeutet dabei eins der Symbole I, A, B, ABA. AB, BA) mit λ_c bezeichnet werde. Diese 5 Functionen hangen durch die Relationen zusammen

$$\lambda_A = \frac{1}{\lambda_I}; \quad \lambda_B = 1 - \lambda_I;$$
$$\lambda_{ABA} = \frac{\lambda_I}{\lambda_I - 1}; \quad \lambda_{AB} = \frac{\lambda_I - 1}{\lambda_I}; \quad \lambda_{BA} = \frac{1}{1 - \lambda_I} \tag{5}$$

die man auch kurz in der Form schreiben kann

$$\lambda_c = C(\lambda_I) \tag{5a}$$

Es sei hier noch erwähnt, dass die Operationen A, B die Periode 2 haben, d. h. $A^2 = 1$, $B^2 = 1$ ist, und dass zwischen ihnen die Relation

$$ABABAB = 1$$

besteht.

Geht man vom Argument ω der Function λ_c über zu $\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$, und bestimmt mittels der conformen Abbildung, wie sich λ_c linear substituirt, so erhält man, zunächst für die Substitutionen S, T, STS, ST, TS, und damit für alle ihnen *modulo* 2 congruenten (ihr Verhalten *modolo* 2 ist in der 3. Columne angegeben) folgende Tabelle:

(6)

Operation	ω Subst.	$\alpha:\beta:\gamma:\delta(\mathrm{mod}\,2)$
1	$\omega' = \omega$	1:0:0:1
S	$\omega + 1$	1:0:1:1
T	$-\frac{1}{\omega}$	0:1:1:0
STS	$\frac{\omega}{\omega + 1}$	1:1:0:1
ST	$\frac{-1}{\omega + 1}$	1:1:1:0
TS	$\frac{-1+\omega}{\omega}$	0:1:1:1

λ_I	λ_A	λ_B	λ_{ABA}	λ_{AB}	λ_{BA}
$\lambda' = \lambda$	$\lambda' = \lambda$	$\lambda' = \lambda$	$\lambda' = \lambda$	$\lambda' = \lambda$	$\lambda' = \lambda$
$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$	$1-\lambda$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$	$1-\lambda$
$1-\lambda$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$	$1-\lambda$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$
$\frac{\lambda}{\lambda-1}$	$1-\lambda$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{\lambda-1}$	$1-\lambda$	$\frac{1}{\lambda}$
$\frac{\lambda-1}{\lambda}$	$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$
$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$	$\frac{\lambda-1}{\lambda}$	$\frac{1}{1-\lambda}$	$\frac{1}{1-\lambda}$

Ueber die Structur dieser Tabelle sei noch bemerkt, dass bei der ω-Substitution, die λ_I in $D(\lambda_I)$ verwandelt, λ_c die Substitution $C^{-1}DC$ erfährt, wo C^{-1} die inverse zu C ist, Denn erfährt λ_I die Substitution D, d. h. wird

$$\lambda_I' = D(\lambda_I) = (\lambda_I)D,$$

so erfährt

$$\lambda_I - C^{-1}(\lambda_c) = (\lambda_c)C^{-1}$$

dieselbe, d. h. es wird

$$\lambda_I' = (\lambda_c)C^{-1}D.$$

Uebt man noch beiderseits die Substitution C aus, so entsteht gerade

$$\lambda_c' = (\lambda_c)C^{-1}DC.$$

Endlich beachte man noch, dass die drei Substitutionen S, I und STS (*modulo* 2) die Periode 2 haben, ebenso A, B, ABA. Die Zuordnung der ω-Substitutionen zu den Doppelverhältnisssubstitutionen kann man also so festlegen, dass man zweien der ersteren zwei der letzteren zuordnet. Dies ist auf 6 verschiedene Weisen möglich, und diese sechs Möglichkeiten finden sich gerade bei den sechs Functionen λ_c.

II. Die Tetraederirrationalität war durch die Tetraedergleichung definirt:

$$J:J-1:1=64(a_1^3a_2-a_2^4)^3:-(a_1^6-20a_1^3a_2^3-8a_2^6)^2:(a_1^4+8a_1a_2^3)^3 \quad (36)$$

Merkwürdige Punkte der a-Ebene sind:

$a = 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \infty$ $(J = 0)$ mit der Multiplicität 2;
$1 \pm \sqrt{3},\ \alpha(1 \pm \sqrt{3}),\ \alpha^2(1 \pm \sqrt{3})$ $(J = 1)$ mit der Multiplicität 1
$0,\ -2,\ -2\alpha,\ -2\alpha^2,$ $(J = \infty)$ mit der Multiplicität 2.

α bedeutet hier die complexe dritte Einheitswurzel

$$\alpha = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Auch die Tetraedersubstitutionen lassen sich aus zweien zusammen setzen. Wir benutzen hierzu etwa

eine Operation A der Periode 3, die $a = 0$ und $a = \infty$ festlasse:

$$a' = \alpha a.$$

eine Operation B der Periode 2, die $1+\sqrt{3}$ und $1-\sqrt{3}$ festlasse:

$$a' = \frac{a+2}{a-1}.$$

Die Tetraedersubstitutionen lauten dann

$1,$	$B,$	$ABA^2,$	$A^2BA.$
$A,$	$BA,$	$AB,$	BAB
$A^2,$	$BA^2,$	$ABA,$	$A^2B.$

Dabei ist

$$A^3 = 1,\quad B^2 = 1,\quad ABABAB = 1.$$

Homogen mit der Determinante 1 geschrieben lauten die Substitutionen:

A: $a_1' = \pm\, \alpha^2 a_1, \qquad a_2' = \pm\, \alpha a_2$

B: $a_1' = \pm\, \frac{1}{\sqrt{-3}}(a_1 + 2a_2),\quad a_2' = \pm\, \frac{1}{\sqrt{-3}}(a_1 - a_2)$

Dem Fundamentalpolygon der dritten Stufe kann man die Gestalt Figur 3. der Tafel geben. Um die 12 Functionen $a(\omega)$ zu unterscheiden, sei wieder a_c die Function, die das Feld C der a-Ebene auf das Feld 1 der ω-Ebenen abbildet. C ist eine Tetraedersubstitution der Form $A^\sigma B^{\sigma'} A^\tau B^{\tau'} \ldots$, und zwar diejenige, durch welche das betrachtete Feld C aus dem mit 1 bezeichneten hervorgeht. Als Feld 1 nehmen wir etwa dasjenige, das sich von $a = 0$ aus an die negative reelle Axe der a-Ebene anschliesst. Diese 12 Functionen verhalten sich natürlich den ω-Substitutionen gegenüber verschieden. Wieder ergiebt sich analog wie beim Doppelverhältniss dass durch die ω-Substitution, die a_c in $D(a_c)$ überführt, a_x' die Tetraedersubstitution $E^{-1}DE$ erleidet, wenn $a_c' = E(a_c)$. Es ist

dann $CE = C'$, $E = C'$, $E = C^{-1}C'$ und a_c' erleidet, also die Substitution $C'^{-1}CDC^{-1}C'$. Daher genügt es, für eine Function a_c die Zusammengehörigkeit der ω-Substitutionen (die *modulo* 3 zu betrachten sind) mit den Tetraedersubstitutionen festzustellen. Führt man dies für die Function a_1 aus, die so normirt ist, dass sich S und A, T und B entsprechen, so erhält man folgende Tabelle:

ω-Subst.		$\alpha:\beta:\gamma:\delta$ mod 3			a-Subst.
1,	$\omega' = \omega$	1:0:0:1	oder	2:0:0:2	1
S,	$\omega+1$	1:0:1:1	„	2:0:2:2	A
S^2,	$\omega+2$	1:0:2:1	„	2:0:1:2	A^2
T,	$-\frac{1}{\omega}$	0:1:2:0	„	0:2:1:0	B
TS,	$\frac{-1+\omega}{\omega}$	0:1:2:1	„	0:2:1:2	BA
TS^2,	$\frac{-1-\omega}{\omega}$	0:1:2:2	„	0:2:1:1	BA^2
STS^2,	$\frac{-2+\omega}{1+\omega}$	1:1:1:2	oder	2:2:2:1	ABA^2
ST	$\frac{-1}{1+\omega}$	1:1:2:0	„	2:2:1:0	AB
STS,	$\frac{\omega}{1+\omega}$	1:1:0:1	„	2:2:0:2	ABA
S^2TS,	$\frac{-2+\omega}{1+\omega}$	1:2:2:2	„	2:1:1:1	A^2BA
TST,	$\frac{\omega}{1-\omega}$	1:2:0:1	„	2:1:0:2	A^2BA^2
S^2T,	$\frac{1}{1-\omega}$	1:2:1:0	„	2:1:2:0	A^2B.

Die dritte und vierte Reihe der Tabelle gibt das Verhalten der ω-Subtitutionen modulo 3) an, wobei die Subsstitutionen $\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ und $\frac{-\gamma-\delta\omega}{-\alpha-\beta\omega}$ bei der nichthomogenen Schreibweise als identisch zu betrachten sind.

III. Die Oktaederirrationalität, definirt durch die Gleichung:

$$J:J-1:1=(o_1^8+14\,o_1^4o_2^4+o_2^8)^3$$
$$::(o_1^{12}-33o_1^8o_2^4-33o_1^4o_2^8+o_2^{12}):108(o_1^5o_2-o_1o_2^5)^4 \qquad (3c)$$

Die Gebietseinteilung der o-Ebene durch die conforme Abbildung ist nach denselben Methoden, wie in den beiden vorhergehenden Fällen, unschwer festzustellen. Die Oktaedersubstitutionen setzen sich wieder aus zweien zusammen, etwa aus

der Substitution A von Periode 4, welche $o = 0$ und $o = \infty$ festlässt,

$$o' = to, \quad \text{und}$$

der Substitution B von Periode 2, welche $o = -1+\sqrt{2}$ und $o = -1-\sqrt{2}$ festlässt,

$$0' = \frac{1-0}{1+0}$$

homogen lauten diese Substitutionen

$$\begin{aligned} A: \quad & o_1' = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} o_1, \qquad o_2' = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} o_2 \\ B: \quad & o_1' = \pm \frac{1}{\sqrt{-2}} (-o_1+o_2), \quad o_2' = \pm \frac{1}{\sqrt{-2}} (o_1+o_2) \end{aligned} \tag{9}$$

Die 24 Oktaedersubstitutionen stellen sich in den Formen dar

$$C, \quad DC, \quad CA, \quad DCA,$$

wo C eine der Substitutionen 1, A^2, BA^2B, A^2BA^2B; D eine der Substitutionen BA^3, AB ist. Dabei ist wieder $A^4 = 1$, $B^2 = 1$, $ABABAB = 1$. Wir bezeichnen wieder eines der schraffirten Felder mit I, etwa dasjenige, das bei $o = 0$ den Winkel $\frac{\pi}{4}$ zeigt und sich an die positive reelle Axe anlehnt, und unterscheiden dann die Felder nach den Substitutionen C, durch die sie aus I hervorgehen.

Dem Fundamentalpolygon der 4ten Stufe kann man die Gestalt Fig. 4. der Tafel geben. Die einzelnen Functionen $o_C(\omega)$ legen wir wieder dadurch fest, dass sie das ω-Feld I auf das Feld C der 0-Ebene abbilden. Die Function o_I erleidet bei der ω-Substitution S die Oktaedersubstitution A, bei T die Substitution B, bei der ω-Substitution $S^u T^{u'} S^v T^{v'} \ldots$ also die o-Substitution $D = A^u B^{u'} A^v B^{v'} \ldots$, o_x aber die Substitution $C^{-1}DC$.

Weiter beachte man, dass das Doppelverhältniss als Modul der zweiten Stufe natürlich auch ein Modul der vierten Stufe ist, allerdings nicht ein Hauptmodul, es muss daher λ rational durch o ausdrückbar sein. Es wird genügen, wenn wir für o_I und λ_I diese Rationalfunction aufstellen. Man wird zu diesem Zwecke in der Doppelverhältnissgleichung (3a) etwa setzen

$$\lambda_1 = a_0 o_1^4 + a_1 o_1^3 o_2 + a_2 o_1^2 o_2^2 + a_3 o_1 o_2^3 + a_4 o_2^4,$$
$$\lambda_2 = b_0 o_1^4 + b_1 o_1^3 o_2 + b_2 o_1^2 o_2^2 + b_3 o_1 o_2^3 + b_4 o_2^4,$$

damit muss gerade die Oktaedergleichung (3c) entstehen. Hat man dann ein Wertesystem $a_0 : a_1 : a_2 : \ldots : b_4$ gefunden, (was am einfachsten und ohne übergrossen Rechnungsaufwand durch Ausprobiren geschieht,) so setze man etwa $\frac{o_1}{o_2} = o_I$ und untersuche, indem man irgend einen speciellen Wert ω, etwa in einem Zipfel des Fundamentalpolygones, ins Auge fasst, welchen Wert für dieses ω

$$\lambda(\omega) = \frac{a_0 o_I^4 + a_1 o_I^3 + a_2 o_I^2 + a_3 o_I + a_4}{b_0 o_I^4 + b_1 o_I^3 + b_2 o_I^2 + b_3 o_I + b_4}$$

annimmt, d. h. welche der Functionen $\lambda_c(\omega)$ man so erhält. Führt man dies durch, so erfährt man, dass

$$\lambda_I = \left(\frac{o_I^2 - 1}{o_I^2 + 1}\right)^2 \tag{10}$$

Um den Zusammenhang zwischen λ_E und o_D zu erhalten, hat man hierin nur λ_I und o_I durch $C^{-1}(\lambda_E)$ und $D^{-1}(o_D)$ zu ersetzen.

Es existirt jedoch noch ein anderer Zusammenhang zwischen o und λ. Das Fundamentalpolygon für o ist nämlich geometrisch ähnlich (im Verhältniss 1 : 2) mit dem viermal nebeneinandergelegten Fundamentalpolygon für λ, also mit dem für $\sqrt[4]{\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda - \lambda_0'}}$, wo λ_0 und λ_0' die Werte von λ bei $\omega = +1$ respective $\omega = i\infty$ sind. Ist nun O_D die Function, die bei $\omega = \frac{1}{2}$ den Wert 0, bei $\omega = i\infty$ aber $o = \infty$ hat, so ist direct

$$\text{Const.} \cdot \sqrt[4]{\frac{\lambda(2\omega) - \lambda_0}{\lambda(2\omega) - \lambda_0'}} = o_D(\omega).$$

Ist $\lambda_0' = \infty$, so setzen wir zunächst Const $= c\sqrt[4]{\lambda_0'}$, so wird

$$o_D = \lim_{\lambda' = \infty} \left\{ c \cdot \sqrt[4]{\frac{\lambda(2\omega) - \lambda_0}{\frac{\lambda(2\omega)}{\lambda_0'} - 1}} \right\} = c' \sqrt[4]{\lambda(2\omega) - \lambda_0}$$

Auf diese Weise ergibt sich [1])

$$o_I(\omega) = \sqrt[4]{1-\lambda_I(2\omega)} = \sqrt[4]{\lambda_B(2\omega)} \tag{11}$$

Was die Zuordnung der ω-Substitutionen zu den Oktaedersubstitutionen bei den einzelnen Functionen o_D betrifft, so ergibt sich wieder, dass bei O_I den ω-Substitutionen S und T die Oktaedersubstitutionen A und B entsprechen, bei o_C also $C^{-1}AC$ respective $C^{-1}BC$.

IV. Die Ikosaederirrationalität, definirt durch

(3d)

$$J:J-1:1 = (-\eta_1^{20}+228\eta_1^{15}\eta_2^5-494\eta_1^{10}\eta_2^{10}-228\eta_1^5\eta_2^{15}+\eta_2^{20})^3$$
$$:(\eta_1^{30}+522\eta_1^{25}\eta_2^5-10005\eta_1^{20}\eta_2^{10}-10005\eta_1^{10}\eta_1^{20}-522\eta_2^5\eta_2^{25}+\eta_2^{30})^2$$
$$:1728(\eta_1^{11}\eta_2+\eta_1^6\eta_2^6-\eta_1\eta_2^{11})^5.$$

In Betreff der Gebietseinteilung der η-Ebene vergleiche man die Figurentafel in dem bereits mehrfach erwähnten Klein'schen Buche. Die Ikosaedersubstitutionen setzen sich aus folgenden zusammen, (vergl. Ikosaeder, pg. 40, 41 ff.):

Der Operation A der Periode 5, $\eta' = \varepsilon\eta$, wobei $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ homogen geschrieben

$$\eta_1' = \pm\varepsilon^3\eta_1, \quad \eta_2' = \pm\varepsilon^2\eta_2 \tag{12a}$$

und der Operation B der Periode 2:

$$\eta' = \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta+(\varepsilon-\varepsilon^4)},$$

homogen:

---

1) Man vergleiche Annalen XIV. p. 155. Die in der Note „Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen" mitgeteilten Formeln des Herrn Fricke $\varkappa = \sqrt{\lambda} = i\frac{o^2-1}{2o}$ (4), und $\lambda(2\omega) = 1-o^4$ (18.) gelten, wie man aus der dort angegebenen Fixirung der Functionen o, ersieht, für $\lambda = \lambda_{ABA}$ und $o = o_{BA^2B}$ und können aus den hier angegebenen Formeln (10) und (11) unmittelbar abgeleitet werden; man hat nur O_I and λ zu ersetzen durch respective $(o)(BA^2B)^{-1} = \frac{1}{o}$ und $(\lambda)(ABA)^{-1} = \frac{\lambda-1}{\lambda}$.

$$\eta_1' = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_1+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta_2],$$
$$\eta_2' = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}[(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta_1+(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_2] \qquad (12b)$$

Die Ikosaedersubstitutionen lauten

$$A^\mu, \quad A^\mu B A^\nu, \quad A^\mu C, \quad A^\mu B A^\nu C,$$

wobei

$$\mu = 0, 1, 2, 3, 4; \quad \nu = 0, 1, 2, 3, 4.$$

C ist die Substitution $A^2BA^3BA^2B$, in η geschrieben:

$$\eta' = -\frac{1}{\eta}.$$

Das Fundamentalpolygon der fünften Stufe besteht aus 5 nebeneinanderliegenden congruenten Teilen, deren jeder die Gestalt Fig. 5. der Tafel hat. Die 60 Functionen η unterscheiden wir wieder analog wie bisher. Bezeichnen wir das in $\eta = 0$ an der positiven reellen η-Axe anliegende schraffirte Feld mit 1, so entsprechen bei der Function $\eta_1(\omega)$ den ω-Substitutionen S, T die η-Substitutionen A, B, der ω-Substitution $\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega} = S^u T^{u'} S^v T^{v'} \ldots$ aber $D = A^u B^{u'} A^v B^{v'} \ldots$ bei η_1, bei der Function η_c aber $C^{-1}DE$.

Sollen wir umgekehrt zu der Ikosaedersubstitution D (oder allgemeiner zu der Substitution D der ϱten Stufe), die die Function m_ϱ erleidet, die ω-Substitution aufsuchen, so suche man die der Substitution D von m_1 entsprechende Substitution von m_c auf: es ist wie leicht einzusehen, CDC^{-1}; diese stelle man in der Form $A^u B^{u'} A^v B^{v'} \ldots$ dar, so gehört zur Substitution D von m_c die ω-Substitution $S^u T^{u'} S^v T^{v'} \ldots$

§ 5.

Modulformen.

Ebenso, wie wir für die Modulfunctionen λ, a, o, η homogene Variabeln einführten, können wir auch für ω homogene Variabeln einführen, und erhalten dann für λ_1, λ_2 u. s w. Modulformen.

Setzen wir

$$\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

so wird [1])

$$J:J-1:1 = g_2(\omega_1, \omega_2)^3 : 27 g_3(\omega_1, \omega_2)^2 : \Delta(\omega_1, \omega_2), \tag{13}$$

wobei

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\mu}\sum_{\nu}{}' \left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right)^4; \quad g_3(\omega_1, \omega_2) = \sum\sum{}' \left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right)^6.$$

Der Accent bei $\Sigma\Sigma'$ bedeutet dabei, dass die Combination $\mu = 0$, $\nu = 0$ ausgeschlossen werden soll. Da nun $F_1{}^3$, $F_2{}^2$ und $F_3{}^\varrho$ von der Ordnung 6 resp. 12, 24, 60 für $\varrho = 2, 3, 4, 5$ sind, so kann man für $\varrho = 2, 3$ und $\varrho = 3$ direct setzen

$$F_1{}^3(m_1, m_2) = g_2{}^3(\omega_1, \omega_2), \quad F_2{}^2(m_1, m_2) = 27 g_3{}^2(\omega_1, \omega_2),$$
$$F_3{}^\varrho(m_1, m_2) = \Delta(\omega_1, \omega_2), \tag{14ab}$$

so sind dadurch $\lambda_1 \lambda_2$ als Modulformen (-2)ter Dimension, a_1 und a_2 als solche (-1)ter Dimension definirt.

Wollten wir ebenso mit $o_1 o_2$ und η_1, η_2 verfahren, so erhielten wir Formen der Dimensionen $-\frac{1}{2}$ bezüglich $-\frac{1}{5}$. Um die dadurch herbeigeführte Vieldeutigkeit zu vermeiden, setzen wir bei der vierten Stufe

$$\begin{aligned} F_1{}^3(o_1 o_2) &= g_2{}^3(\omega_1\omega_2) . \Delta(\omega_1, \omega_2) \\ F_2{}^2(o_1, o_2) &= 27 g_3{}^2(\omega_1, \omega_2) . \Delta(\omega_1, \omega_2) \\ F_3{}^4(o_1, o_2) &= \Delta^2(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \tag{14c}$$

so ist, da auch die 2te und 3te Wurzel aus Δ noch eindeutige Function von ω_1, ω_2 ist [2]), o_1 und o_2 als Modulform (-1)ter Dimension definirt.

Analog setzen wir bei der fünften Stufe

$$F_1 = g_2 \Delta^m, \quad F_2 = \sqrt[2]{27} . g_3 . \Delta^n, \quad F_3 = \Delta^p$$

Da $\frac{F_1{}^3}{F_3{}^5}$ und $\frac{F_2{}^2}{F_3{}^5}$ constant sein sollen, so müssen $g_2{}^3 . \Delta^{3m-5p}$ und $g_3{}^2 . \Delta^{2m-5p}$ von der nullten Dimension sein, d. h,

$$3m - 5p = -1, \quad 2n - 5p = -1,$$

also z. B.

$$p = -1, \quad m = -2, \quad n = -3.$$

Daher setze man

1) Man vergleiche z. B. Hurmitz, Annalen XVIII, pg. 546, 554.

2) Vergl. ibid. pg. 555.

$$F_1(\eta_1\,\eta_2) = \frac{g_2(\omega_1\omega_2)}{\Delta(\omega_1\,\omega_2)^2}. \quad F_2(\eta_1\,\eta_2) = \sqrt{27}\,\frac{g_3(\omega_1\omega_2)}{\Delta(\omega_1\,\omega_2)} \tag{14d}$$

$$F_3(\eta,\,\eta_2) = \frac{1}{\Delta(\omega_1\,\omega_2)},$$

so sind auch η_1 und η_2 als Modulformen, und zwar der Dimension $+1$ definirt.

Diese Formeln setzen uns in Stand, direct die Zuordnung der homogenen ω-Substitutionen zu den noch bis auf einen gewissen Factor unbestimmten homogenen linearen Substitutionen der Modulformen λ_1, λ_2 u. s. w. aufzustellen.

Bei dem Doppelverhältniss war

$$F_1(m_1,m_2) = \sqrt[3]{4}.(\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2) = g_2(\omega_1,\omega_2) = \Sigma'\left(\frac{1}{\mu\omega_1+\nu\omega_2}\right)^4,$$

$$\frac{1}{\sqrt{27}}\,F_2(m_1m_2) = \frac{1}{\sqrt{27}}\,(2\lambda_1^3-3\lambda_1^2\lambda_2-3\lambda_1\lambda_2^2+2\lambda_2^3)$$
$$= g_3(\omega_1,\omega_2) = \Sigma'\left(\frac{1}{\mu\omega_1+\nu\omega_2}\right)^6,$$

bis auf dritte, respective zweite Einheitswurzeln. Aus diesen Gleichungen folgt

$$\lambda_1 = \gamma.\sqrt[3]{4}.\sqrt{27}\,\frac{\lambda(\lambda^2-\lambda+1)}{2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2}\cdot\frac{g_3(\omega_1,\omega_2)}{g_2(\omega_1,\omega_2)}$$

$$\lambda_2 = \gamma.\sqrt[3]{4}.\sqrt{27}\,\frac{\lambda^2-\lambda+1}{2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2}\cdot\frac{g_3(\omega_1,\omega_2)}{g_2(\omega_1,\omega_2)}$$

γ bedeutet eine hier nicht näher in Betracht kommende sechste Einheitswurzel. Durch diese Formeln sind λ_1 und λ_2 (bis auf die sechste Einheitswurzel γ) als eindeutige Functionen von ω_1, ω_2 und λ bestimmt, als Modulformen.

Wenn wir jetzt die Function $\lambda = \lambda_I$ herausgreifen, so entspricht der Substitution S, d. h. $\omega' = \omega+1$, homogen geschrieben:

$$\omega_1' = \pm\omega_1, \quad \omega_2' = \pm(\omega_1+\omega_2)$$

die Substitution

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda}.$$

Dabei bleibt sowol

$$g_2 = \Sigma'\left(\frac{1}{\mu\omega_1+\nu\omega_2}\right)^4,$$

als auch

$$g_3 = \Sigma \left(\frac{1}{\mu\omega_1 + \nu\omega_2}\right)^6$$

ungeändert, und wir erhalten:

$$\lambda_1' = \gamma \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{27}\, \frac{1-\lambda+\lambda^2}{2-3\lambda-3\lambda^2+2\lambda^3} \cdot \frac{g_3}{g_2} = \lambda_2,$$

$$\lambda_2' = \gamma \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{27}\, \frac{\lambda(1-\lambda+\lambda^2)}{2-3\lambda-3\lambda^2+2\lambda^3} \cdot \frac{g_3}{g_2} = \lambda_1,$$

also nicht

$$\lambda_1' = \pm i\lambda_2, \quad \lambda_2' = \pm i\lambda_1.$$

Bei der Substitution T, d. h. $\omega' = -\frac{1}{\omega}$, homogen:

$$\omega_1' = \pm\omega_2, \quad \omega_2' = \mp\omega_1,$$

der $\lambda' = 1-\lambda$ entspricht, bleiben g_2 und g_3 gleichfalls ungeändert, und so kommt

$$\lambda_1' = -\gamma \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{27}(1-\lambda)\, \frac{\lambda^2-\lambda+1}{2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2} \cdot \frac{g_3}{g_2} = -\lambda_2+\lambda_1$$

$$\lambda_2' = -\gamma \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{27}\, \frac{\lambda^2-\lambda+1}{2\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda+2} \cdot \frac{g_3}{g_2} = -\lambda_2.$$

Den Substitutionen A und B entsprechen also homogene Substitutionen der Determinante -1.

Ganz analoge Rechnungen haben wir jetzt bei den anderen Stufen durchzuführen.

Bei der dritten Stufe ist

$$i(a_1^6 - 20a_1^3a_2^3 - 8a_2^6) = \sqrt{27} \cdot g_3,$$
$$4(a_1^3a_2 - a_2^4) = g_2$$

bis auf zweite, bezüglich dritte, Einheitswurzeln. Aus diesen Gleichungen lassen sich jedoch nicht a_1 und a_2 direct, sondern nur a_1^2, a_1a_2 und a_2^2 berechnen, und zwar ergibt sich

$$a_1^2 = \gamma \cdot \frac{4\sqrt{27}}{i}\, \frac{a^2(a^3-1)}{a^6-20a^3-8} \cdot \frac{g_3}{g_2},$$

$$a_1a_2 = \gamma \cdot \frac{4\sqrt{27}}{i}\, \frac{a(a^3-1)}{a^6-20a^3-8} \cdot \frac{g_3}{g_2},$$

$$a_2^2 = \gamma \cdot \frac{4\sqrt{27}}{i}\, \frac{a^3-1}{a^6-20a^3-8} \cdot \frac{g_3}{g_2}.$$

γ bedeutet hier wieder in den drei Formeln die nämliche sechste Einheitswurzel.

Setzen wir $a = a_1$, und unterwerfen die Formeln der Substitution

$$a' = \alpha a, \quad \omega' = \omega + 1,$$

so entsteht:

$$(a_1^2)' = \alpha^2 a_1^2, \quad (a_1 a_2)' = \alpha\, a_1 a_2, \quad (a_2^2)' = a_2^2,$$

wobei mit $(a_1^2)'$ u. s. w. bezeichnet ist, was aus a_1^2 u. s. w. durch die ebenangeführte Substitution entsteht. Für a_1 und a_2 folgt hieraus:

$$a_1' = = \pm \alpha a_1, \quad a_1' = \pm a_2,$$

also zwei nur durchs Vorzeichen unterschiedene Substitutionen der Determinante

$$\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Bei der Substitution

$$a' = \frac{a+2}{a-1}, \quad \omega' = -\frac{1}{\omega}$$

wird

$$a^6 - 20a^3 - 8 \text{ zu } -27\frac{a^6 - 20a^3 - 8}{(a-1)^6},$$

$$a^3 - 1 \text{ zu } 9\frac{a^2+a+1}{(a-1)^3} = 9\frac{a^3-1}{(a-1)^4},$$

und so folgt

$$(a_1^2)' = -\tfrac{1}{3}\frac{(a+2)^2}{a^2} a_1^2 = -\tfrac{1}{3}(a_1 + 2a_2)^2,$$

$$(a_1 a_2)' = -\tfrac{1}{3}\frac{(a+2)(a-1)}{a} a_1 a_2 = -\tfrac{1}{3}(a_1 + 2a_2)(a_1 - a_2),$$

$$(a_2^2)' = -\tfrac{1}{3}(a-1)^2 a_2^2 = -\tfrac{1}{3}(a_1 - a_2)^2,$$

d. h.

$$a_1' = \pm\frac{1}{\sqrt{-3}}(a_1 + 2a_2); \quad a_2' = \pm\frac{1}{\sqrt{-3}}(a_1 - a_2).$$

Wir erhalten also zwei Substitutionen der Determinante $+1$.

Weiter bei der vierten Stufe setzen wir (bis auf dritte, bezüglich vierte Einheitswurzeln)

$$o_1^8 + 14 o_1^4 o_2^4 + o_2^8 = g_2 \cdot \sqrt[3]{\Delta}$$

$$o_1^5 o_2 - o_1 o_2^5 = \frac{1}{\sqrt[4]{108}} \cdot \sqrt[2]{\Delta}$$

und erhalten daraus:

$$o_1^2 = \gamma' \cdot \sqrt[4]{108}\, \frac{o^3(o^4-1)}{o^8+14o^4+1} \cdot \frac{g_2}{\sqrt[6]{\Delta}}$$

$$o_1 o_2 = \gamma' \cdot \sqrt[4]{108}\, \frac{o^2(o^4-1)}{o^8+14o^4+1} \cdot \frac{g_2}{\sqrt[6]{\Delta}}$$

$$o_2^2 = \gamma' \cdot \sqrt[4]{108}\, \frac{o(o^4-1)}{o^8+14o_2+1} \cdot \frac{g_2}{\sqrt[6]{\Delta}}$$

γ' bedeutet hier eine zwölfte Einheitswurzel. Legen wir wieder die Function o_I zugrunde, so ergibt die Substitution $\omega' = \omega + 1$, $o' = io$:

$$(o_1^2)' = -io_1^2, \quad (o_1 o_2)' = -o_1 o_2, \quad (o_2^2)' = io_2^2,$$

d. h.

$$o_1' = \pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}} o_1, \quad o_2' = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} o_2,$$

also zwei Substitutionen der Determinante -1.

Ebenso ergibt die Substitution $\omega' = -\frac{1}{\omega}$, $o' = -\frac{1-o}{1+o}$ das Resultat

$$(o_1^2)' = -\tfrac{1}{2}(o_1 - o_2),$$
$$(o_1 o_2)' = -\tfrac{1}{2}(o_1^2 - o_2^2),$$
$$(o_2^2)' = -\tfrac{1}{2}(o_1 + o_2)^2,$$

d. h. also

$$o_1' = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}(o_1 - o_2), \qquad o_2' = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}(o_1 + o_2)$$

zwei Substitutionen der Determinante $+1$.

Endlich bei der fünften Stufe bilden wir

$$\frac{1}{\sqrt[5]{1728}} \frac{F_1(\eta_1, \eta_2) \cdot F_3(\eta_1, \eta_2)}{F_2(\eta_1, \eta_2)} = \gamma'' \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{1728}\sqrt{27}} \frac{g_2}{g_3},$$

und erhalten

$$\eta_1^2 = \gamma'' \frac{1}{\sqrt{27}} \frac{\eta^2 F_2(\eta, 1)}{F_1(\eta, 1) F_3(\eta, 1)} \cdot \frac{g_2}{g_3},$$

$$\eta_1 \eta_2 = \gamma'' \frac{1}{\sqrt{27}} \frac{\eta \cdot F_2(\eta, 1)}{F_1(\eta, 1) \cdot F_3(\eta, 1)} \cdot \frac{g_2}{g_3},$$

$$\eta_2^2 = \gamma'' \frac{1}{\sqrt{27}} \frac{F_2(\eta, 1)}{F_1(\eta, 1) \cdot F_3(\eta, 1)} \cdot \frac{g_2}{g_3}$$

γ'' bedeutet hier eine dreissigste Einheitswurzel.

Bei der Substitution $\omega' = \omega + 1$, $\eta' = \varepsilon\eta$, $(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}})$ ergibt sich

$$(\eta_1^2)' = \varepsilon\eta_1^2, \quad (\eta_1\eta_2)' = \eta_1\eta_2, \quad (\eta_2^2)' = \pm\varepsilon^4\eta^2,$$

d. h.

$$\eta' = \pm\varepsilon^3\eta, \quad \eta_2' = \pm\varepsilon^2\eta_2,$$

Substitutionen der Determinante $+1$.

Ebenso ergibt die Substitution

$$\omega' = -\frac{1}{\omega}, \qquad \eta' = \frac{-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\varepsilon + (\eta-\varepsilon^4)}$$

$$(\eta_1^2)' = \frac{1}{5\eta^2}[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)]^2\eta_1^2,$$

$$(\eta_1\eta_2)' = \frac{1}{5\eta}[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta + \varepsilon^2-\varepsilon^3)][(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta + (\varepsilon-\varepsilon^4)]\eta_1\eta_2,$$

$$(\eta_2^2)'' = \tfrac{1}{5}[(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta + (\varepsilon-\varepsilon^4)]^2\eta_2^2,$$

also

$$\eta_1' = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_1 + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta^2],$$

$$\eta_2' = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}[(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta_1 + (\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_2],$$

also wieder Substitutionen der Determinante $+1$.

Kapitel II.

Die Modulargleichungen der Galois'schen Moduln der 2. bis 5. Stufe.

§ 6.

Transformation n.Ordnung und Repräsentanten.

Unter Transformation n.Ordnung einer Modulfunction $f(\omega)$ versteht man den Uebergang von $f(\omega)$ zu $f\left(\frac{C+D\omega}{A+B\omega}\right)$, wo unter A, B C, D vier ganze Zahlen der Determinante $AD - BC = n$ verstanden werden sollen. Wir werden im Folgenden unter $f(\omega)$ stets einen Galois'schen Hauptmodul der ϱten Stufe ($\varrho = 2, 3, 4, 5$) verstehen.

Jede Zahl $\frac{C+D\omega}{A+B\omega}$ lässt sich zunächst in der Form darstellen

$$\frac{C+D\omega}{A+B\omega} = \frac{c+d.\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}}{a+b.\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}} = \frac{(n\alpha c+\gamma d)+(n\beta c+\delta d)\omega}{(n\alpha a+\gamma b)+(n\beta a+\delta b)\omega},$$

wobei die Ganzzahlen a, b, c, d, α, β, γ, δ den Bedingungen genügen:

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1, \quad ad-bc=1,$$
$$a:b:c:d \equiv 1:0:0:1 \pmod{\varrho}.$$

Denn Gleichung (15) erfordert nur, dass

$$\begin{aligned} n\alpha c+\gamma d &= \varepsilon C,\\ n\beta c+\delta d &= \varepsilon D,\\ n\alpha a+\gamma b &= \varepsilon A,\\ n\beta a+\delta b &= \varepsilon B, \end{aligned}$$

wo ε entweder in allen vier Gleichungen gleich $+1$, oder überall gleich -1 zu setzen ist; ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, kann man $\varepsilon=+1$ setzen. Weiter erkennt man, dass die ganzzahlige Bestimmung mindestens eines Systems von Zahlen a, b, c, d, α, β, γ, δ, so dass $a:b:c:d \equiv 1:0:0:1 \bmod \varrho$, sobald n teilerfremd ϱ ist, und unter dieser Voraussetzung allein werden die folgenden Schlüsse Geltung haben, stets möglich ist. Insbesondere ergibt sich noch, dass

$$A:B:C:D \equiv n\alpha:n\beta:\gamma:\delta \pmod{\varrho}$$

Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit kann man daher unter Transformation n. Ordnung den Uebergang von $f(\omega)$ zu $f\left(\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)$ verstehen, wobei nur $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ zu sein braucht.

Von den unendlich vielen Werten $\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ ergeben nun diejenigen noch den nämlichen Wert f, welche durch eine modulo ϱ zur Identität congruente lineare Substitution (der Determinante 1) aus einander hervorgehen. Seien $\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ und $\frac{1}{n}\frac{\gamma_1+\delta_1\omega}{\alpha_1+\beta_1\omega}$ zwei solche Werte, und sei also

$$\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega} = \frac{c+d.\frac{1}{n}\frac{\gamma_1+\delta_1\omega}{\alpha_1+\beta_1\omega}}{a+b.\frac{1}{n}\frac{\gamma_1+\delta_1\omega}{\alpha_1+\beta_1\omega}}$$

$$(a : b : c : d \equiv 1 : 0 : 0 : 1 \bmod \varrho, \quad ad - bc = 1),$$

so verlangt dies:

$$\begin{aligned} \varepsilon\gamma &= n\alpha_1 c + \gamma_1 d, \\ \varepsilon\delta &= n\beta_1 c + \delta_1 d, \\ \varepsilon n\alpha &= n\alpha_1 a + \gamma_1 b, \\ \varepsilon n\beta &= n\beta_1 a + \delta_1 b, \end{aligned}$$

oder aufgelöst:

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon(\alpha\delta_1 - \beta\gamma_1), \\ b &= \varepsilon n(\alpha_1\beta - \alpha\beta_1), \\ nc &= \varepsilon(\gamma\delta_1 - \gamma_1\delta), \\ d &= \varepsilon(\alpha_1\delta - \beta_1\gamma), \end{aligned}$$

d. h. es muss

$$b \equiv 0 \bmod n$$

sein. Ferner ist noch

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta \equiv \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 : \delta_1 \bmod \varrho.$$

Es genügt also, anstelle aller Wertesysteme $\alpha_\varkappa : \beta_\varkappa : \gamma_\varkappa : \delta_\varkappa$, welche zu $\alpha : \beta : \gamma : \delta$ modulo ϱ congruent sind, nur solche zu betrachten, die nicht durch eine Substitution $\omega' = \frac{c + d\omega}{a + b\omega}(a : b : c : d \equiv 1 : 0 : 0 : 1 \bmod \varrho,\ b \equiv 0 \bmod n)$ ineinander überführbare Werte $\frac{1}{n}\frac{\gamma_\varkappa + \delta_\varkappa\omega}{\alpha_\varkappa + \beta_\varkappa\omega}$ ergeben. Solcher Werte gibt es aber soviel, als der Index der Gruppe $a : b : c : d \equiv 1 : 0 : 0 : 1 \bmod \varrho,\ b \equiv 0 \bmod n$ beträgt, d. h. der Index der Gruppe, welche den beiden Gruppen $a : b : c : d \equiv 1 : 0 : 0 : 1 \bmod \varrho$, und $b = 0 \bmod n$, gemeinsam ist. Der Index der ersteren Gruppe ist aber $P = \varrho^3 \prod_\varkappa \left(1 - \frac{1}{\sigma^2}\right)$ (vergl. Gleichung 1), der Index der letzteren Gruppe hingegen [1])

$$N = n\Pi\left(1 + \frac{1}{s}\right) \tag{15}$$

wo Π über alle in n enthaltenen Primzahlen zu erstrecken ist. Diese beiden Congruenzgruppen haben, da ihre Stufen n und ϱ teilerfremd sein sollen, eine Gruppe vom Index $P.N$ gemeinsam [2]),

1) Man vergleiche etwa bei Herrn Hurmitz (Annalen XVIII p. 568) oder bei Herrn Dedekind (Crelle's Journal 83. Bd., Seite 288), wo die nämliche Anzahl linear unabhängigen Werte $\frac{C + D\omega}{A + B\omega}$ für Transformation n. Ordnung des Moduls der 1. Stufe abgeleitet wird.

2) Man vergleiche Annalen XVII. p. 67. Die Verwendung der Repräsentanten in der Form $\frac{1}{n}\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$ findet sich zuerst bei Herrn Klein, Annalen XIV. p. 130. (Vergl. Annalen XVIII. p. 566).

und man darf sich daher bei der Transformation n. Ordnung des Moduls der ϱten Stufe auf die Betrachtung von PN „repräsentirenden“ Argumenten $\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$, von PN Repräsentanten beschränken, oder: $f(\omega)$ geht durch die Transformation $n$ter Ordnung in PN verschiedene Werte $f\left(\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)$ über.

Diese PN Repräsentanten zerlegen wir nach dem Verhalten von $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ modulo ϱ in P Gruppen von je N. Die solch einer Gruppe angehörigen Zahlen $\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ sind durch modulo ϱ zur Identität congruente lineare Substitutionen ineinander überführbar, nicht aber die Zahlen $\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ einer Gruppe, die wir als „inbezug auf die Gruppe $b\equiv 0 \bmod n$ relativ inäquivalent“ bezeichnen könnten, da zwei Zahlen $\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ und $\frac{1}{n}\frac{\gamma_1+\delta_1\omega}{\alpha_1+\beta_1\omega}$, wenn sie überhaupt durch eine lineare Substitution der Determinante 1 ineinander überführbar sein sollen, es mittels einer Substitution mit $b\equiv 0 \bmod n$ sein müssen. Wenn aber diese Zahlen durch eine Substitution $\omega'=\frac{c+d\omega}{a+bn\omega}$ auseinander hervorgehen, so gehen die Zahlen $\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ und $\frac{\gamma_1+\delta_1\omega}{\alpha_1+\beta_1\omega}$ durch eine Substitution

$$n\omega' = n\,\frac{c+d\omega}{a+bn\omega} \quad \text{d. h.} \quad n\omega' = \frac{nc+dn\omega}{a+bn\omega}$$

auseinander hervor, bei der der c entsprechende Substitutionscoefficient $\equiv 0 \bmod n$ ist: man kann daher die einer Repräsentantengruppe angehörigen Werte $\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ als „inbezug auf die Gruppe $c\equiv 0 \bmod n$ relativ inquivalent“ bezeichnen.

Bezeichnen wir die N zur Gruppe $\alpha:\beta:\gamma:\delta\equiv 1:0:0:1 (\bmod \varrho)$ angehörigen (inbezug auf $c\equiv \bmod n$ inäquivalenten) Werte $\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}$ mit $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{N-1}$, so lassen sich die zur Gruppe $\alpha:\beta:\gamma:\delta \equiv \alpha_0:\beta_0:\gamma_0:\delta_0 (\bmod \varrho)$ gehörigen Repräsentanten in der Form $\frac{1}{n}\frac{\gamma_0+\delta_0\omega_x}{\alpha_0+\beta_0\omega_x}(\alpha_0\delta_0-\beta_0\gamma_0=1)$ darstellen, wo für ω_x die Werte $\omega_0\omega_1 \ldots \omega_{N-1}$ zu setzen sind, denn diese Ausdrücke stellen N inbezug auf die Gruppe $b\equiv 0 \bmod n$, d. h. überhaupt inäquivalente Werte dar.

§ 7.

Die zugehörigen Modulargleichungen.

Beschränken wir uns zunächst wieder auf die N Repräsentanten $\frac{\omega_0}{n}, \frac{\omega_1}{n} \cdots \frac{\omega_{N-1}}{n}$, so erhalten wir über die Lage derselben durch folgende Ueberlegung Rechenschaft.

In der ω-Ebene haben wir zunächst drei Gebietseinteilungen: Erstens die der Gesamtheit der linearen Substitutionen entsprechende Haupteinteilung in Dreieckspaare. Zweitens die Einteilung in Fundamentalpolygone der ϱ-ten Stufe. (Jedes derselben enthält P Felder der ersten Gebietseinteilung). Drittens die Einteilung in die zur Gruppe $\gamma \equiv o \bmod n$ gehörigen Fundamentalpolygone, deren jedes aus N Dreieckspaaren der ersten Einteilung besteht. Da n und ϱ teilerfremd sind, so können wir in der ω-Ebene noch eine vierte Einteilung erhalten, deren Felder aus N Fundamentalpolygonen der ϱ-ten Stufe, oder was auf dasselbe hinauskommt, aus P Fundamentalpolygonen der dritten Einteilung, jedenfalls aus NP Dreieckspaaren der ersten Einteilung, bestehen. Diese grossen Polygone sind die Fundamentalpolygone zu der den beiden Gruppen $a:b:c:d \equiv 1:0:0:1 \pmod{\varrho}$ und $c \equiv o \pmod{n}$ gemeinsamen Untergruppe vom Index NP, inbezug auf welche die NP Repräsentanten $\omega_\varkappa$ und $\frac{\gamma+\delta\omega_\varkappa}{\alpha+\beta\omega_\varkappa}$ (nicht $\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega_\varkappa}{\alpha+\beta\omega_\varkappa}$,) inäquivalent sind.

Sei P_0 solch ein Polygon, so enthält es gerade N Punkte $\omega_0, \omega_1, \ldots \omega_{N-1}$, welche mit einem beliebigen Punkte ω durch *modulo* ϱ zur Identität congruente Substitutionen verbunden, und inbezug auf die Gruppe $\gamma \equiv o \bmod n$ inäquivalent sind. Wir können sie also gerade als die $\omega_\varkappa$ der ersten Repräsentantengruppe verwenden, die $\frac{\omega_\varkappa}{n}$ sind dann die Repräsentanten der ersten Gruppe. Wir können uns also die Transformation n. Ordnung in der Weise veranschaulichen, dass wir zu $x = f(\omega)$ einen zugehörigen Wert ω, und zu diesem die N entsprechenden $\omega_\varkappa$ im Polygon der 4. Einteilung aufsuchen. Bildet man dann von diesen $\omega_\varkappa$ die n-ten Teile, so hat man die N der ersten Gruppe entsprechenden Argumente $\frac{\omega_\varkappa}{n}$ des transformirten Moduls. Ueberstreicht jetzt ω sein Fundamentalpolygon der ϱ-ten Stufe, so überstreichen die $\omega_\varkappa$ gleichfalls N Fundamentalpolygone der ϱ-ten Stufe und diese setzen sich zum Fundamentalpolygon P_0 der vierten Einteilung zusammen. Die Argumente $\frac{\omega_\varkappa}{n}$ von y über-

streichen dann eine zu P_0 geometrisch ähnliche (auf $\frac{1}{n}$ verkleinerte) Figur P_0', die ein Bild für die Werte ist, welche y annimmt, wenn x successive sämtliche Zahlenwerte annimmt. Um die Riemann'sche Fläche über der y-Ebene zu erhalten, hat man daher nur das Polygon P_0' mittels der Function $f(\omega')$ auf die y-Ebene abzubilden. Die Kanten dieses Polygones P_0' binden sich durch die Substitutionen, die aus $\omega' = \frac{n\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$ $(\alpha:\beta:\gamma:\delta \equiv 1:0:0:1 \bmod \varrho)$ entstehen, wenn ω, ω' durch $n\omega$, $n\omega'$ ersetzt werden, also durch die Substitutionen $\omega' = \frac{\gamma + d\omega}{\alpha + n\beta\omega}$, und da $\alpha:n\beta:\gamma:\delta \equiv 1:0:0:1 \bmod \varrho$ d. h. die Kanten von P' sich durch *modulo* ϱ zur Identität congruente Substitutionen binden, so ist die Riemann'sche Fläche für y eine geschlossene, und da P_0 und P_0' aus einem Stück bestehen, eine aus einem Stück bestehende Fläche. Beachtet man noch, dass P_0 in gleicher Weise ein Bild der Riemann'schen Fläche für x ist, wie P_0' für y, so folgt:

Zwischen $x = f(\omega)$ und $y = f\left(\frac{\omega_\varkappa}{n}\right)$ besteht eine irreducible algebraische Gleichung $\varphi(xy) = 0$, die sowol x als y bis zur N-ten Potenz enthält.

Es ist nicht schwer einzusehen, dass auch zwischen x und den zu den übrigen $P-1$ Repräsentantengruppen

$$\frac{1}{n}\frac{\gamma_0 + \delta_0\omega_\varkappa}{\alpha_0 + \beta_0\omega_\varkappa} \quad (\varkappa = 0,1 \ldots N-1)$$

gehörigen Werten y ebensolche irreducible Gleichungen, der Zahl nach noch $P-1$, bestehen müssen. Denn die Werte $\frac{1}{n}\frac{\gamma_0 + \delta_0\omega_\varkappa}{\alpha_0 + \beta_0\omega_\varkappa}$ lassen sich auch in der Form schreiben

$$\frac{\gamma_0 + n\delta_0 \frac{\omega_\varkappa}{n}}{\frac{\alpha_0}{n} + \beta_0 \frac{\omega_\varkappa}{n}}$$

(γ_0 kommt nur modulo ϱ in betracht und kann daher $\equiv 0 \bmod n$ gesetzt werden) dann ist $f\left(\frac{\omega_\varkappa}{n}\right)$ nach den Sätzen des vorigen Capitels mit $f\left(\frac{1}{n}\frac{\gamma_0 + \delta_0\omega_\varkappa}{\alpha_0 + \beta_0\omega_\varkappa}\right)$ durch eine lineare Gleichung verbunden. Hieraus folgt:

Die PN Werte y, in die x durch die Transformation n-ter Ordnung übergeführt wird, sind die Wurzeln einer

Gleichung $F(xy)=0$ die sich in P irreducible Gleichungen N-ter Ordnung für y spaltet.[1])

Statt der spezielleren Repräsentanten $\omega'=\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega_\varkappa}{\alpha+\beta\omega_\varkappa}$ können wir wieder für jeden Repräsentanten mittels einer Substitution

$$\frac{c+d\omega'}{a+b\omega'} \quad (\equiv 1 \bmod \varrho)$$

einen solchen der Form $\frac{C+D\omega}{A+B\omega}$ einführen. Daher schreibt sich die Modulargleichung auch in der Form

$$F(xy)=\prod_{NP}\left[y-f\left(\frac{1}{n}\frac{\gamma+\delta\omega_\varkappa}{\alpha+\beta\omega_\varkappa}\right)\right]=\prod_{NP}\left[f(\omega)-f\left(\frac{C+D\omega^0}{A+B\omega^0}\right)\right]$$
$$=\sum_{i=0}^{i=NP} a_i y^i=0$$

wenn das Argument von x mit ω^0 bezeichnet wird. Die beiden Producte bestehen aus je NP Factoren, nnd ist in deren zweitem Gliede f über alle NP Repräsentanten zu erstrecken. Die Coefficienten a_i sind Functionen von x, nnd zwar rationale, da sonst einem Werte x mehr als NP Werte y zugeordnet wären.

Greifen wir jetzt einen der Repräsentanten heraus, etwa

$$\frac{C_0+D_0\omega^0}{A_0+B_0\omega^0}=\omega'$$

setzen also

$$\omega^0=\frac{C_0-A_0\omega'}{-D_0+B_0\omega'}$$

und unterwerfen $y_0=f(\omega')$ einer Transformation n. Ordnung, so erhalten wir eine ähnliche Modulargleichung $F'=0$. Hier wollen wir jedoch den Repräsentanten die Form $\frac{C-A\omega'}{-D+B\omega'}$ geben, wo A, B, C, D die nämlichen NP Wertesysteme durchlaufen, wie oben. Diese Zahlen bilden natürlich gleichfalls ein volles Repräsentantensystem, weil sie sich nach dem Verhalten von $-D:B:C:-A$ (modulo ϱ) in P Gruppen von je N inäquivalenten Werten teilen lassen. F' kann daher in der Form geschrieben werden

$$F'=\prod_{NP}\left[f(\omega)-f\left(\frac{C-A\omega'}{-D+B\omega'}\right)\right]$$
$$=\Pi\left[z-f\left(\frac{C-A\omega'}{-D+B\omega'}\right)\right]=F(y_0,z)=0$$

1) Man vergleiche bei Herrn Gierster, Annalen XXI pg. 9 ff.

Unter den Wurzeln dieser Gleichung ist nun sicher eine und nur eine gleich $f(\omega^0) = x$, nämlich die dem Repräsentanten

$$\frac{C_0 - A_0\,\omega'}{-D_0 + B_0\,\omega'} = \frac{C_0 - A_0\,\dfrac{C_0 + D_0\,\omega^0}{A_0 + B_0\,\omega^0}}{-D_0 + B_0\,\dfrac{C_0 + D_0\,\omega^0}{A_0 + B_0\,\omega^0}} = \omega^0$$

entsprechende. d. h. für alle Wertesysteme xy, für welche $F(xy) = 0$ ist, ist auch $F(yx) = 0$, d. h. $F(xy)$ und $F(yx)$ müssen bis auf einen Factor ψ übereinstimmen, so dass

$$F(xy) = \psi . F(yx) = \psi^2 F(xy)$$

d. h. es ist $\psi = \pm 1$. Hieraus iolgt:

Die Modulargleichung $F(xy) = 0$ geht bei Vertauschung von x und y bis auf einen eventuellen Zeichenwechsel in sich über.

Da weiter $F(xy)$ aus P irreducibeln Factoren $\varphi_i(xy)$ besteht, so folgt:

Bei Vertauschung von x und y bleiben die Factoren $\varphi_i(xy)$ entweder (bis auf einen eventuellen Zeichenwechsel) erhalten, oder vertauschen sich (teilweise oder sämtlich) paarweise.[1])

§ 8.

Die Substitutionen der Modulargleichung in sich.

Es sei nun $\varphi_i(xy) = 0$ der zu den N Repräsentanten $\dfrac{1\,\gamma_i + \delta_i\,\omega_x}{n\,\alpha_i + \beta_i\,\omega_x}$ gehörige Factor der Modulargleichung, so ist also

$$x = f(\omega), \quad y_x = f\left(\frac{1\,\gamma_i + \delta_i\,\omega_x}{n\,\alpha_i + \beta_i\,\omega_x}\right)$$

oder wenn wir

$$\frac{\gamma_i + \delta_i\,\omega_x}{\alpha_i + \beta_i\,\omega_x} = \omega'_x, \quad \omega_x = \frac{\gamma_i - \alpha_i\,\omega'_x}{-\delta_i + \beta_i\,\omega'_x}$$

setzen, wird

$$x = f\left(\frac{\gamma_i - \alpha_i\,\omega_x'}{-\delta_i + \gamma_i\,\omega_x'}\right), \quad y = f\left(\frac{\omega_x'}{n}\right)$$

(Die verschiedenen ω'_x ergeben selbstverständlich die nämlichen Werte x.) Daher ist

1) Vergleiche Gierster, Annalen XXI, p. 12 ff.

$$\varphi_i(xy) = \varphi_0\left(x(\omega_\varkappa), y\left(\frac{1}{n}\frac{\gamma_i+\delta_i\omega_\varkappa}{\alpha_i+\beta_i\omega_\varkappa}\right)\right) = \varphi_0\left(x\begin{pmatrix}\gamma_i+\alpha_i\omega_\varkappa'\\ -\delta_i+\beta_i\omega'_\varkappa\end{pmatrix}, y\begin{pmatrix}\omega_\varkappa'\\ n\end{pmatrix}\right)$$

wenn φ_0 der zu den Repräsentanten $\frac{\omega_\varkappa}{n}$ gehörige Factor ist. Ersetzen wir noch $\omega_\varkappa'$ durch $\omega_\varkappa$, $x\begin{pmatrix}\gamma_i-\alpha_i\omega_\varkappa'\\ -\delta_i+\beta_i\omega_\varkappa'\end{pmatrix}$ durch $x\begin{pmatrix}\gamma_i-\alpha_i\omega\\ -\delta_i+\beta_i\omega\end{pmatrix}$, so wird

$$\varphi_i(x, y) = \varphi_0\left(x\begin{pmatrix}\gamma_i-\alpha_i\omega\\ -\delta_i+\beta_i\omega\end{pmatrix}, y\begin{pmatrix}\omega_\varkappa\\ n\end{pmatrix}\right) = \varphi_0(x', y) = 0$$

da $x\begin{pmatrix}\gamma_i-\alpha_i\omega\\ -\delta_i+\beta_i\omega\end{pmatrix} = x'(\omega)$ nur eine andere der durch Gleichung (2) definirten P Moduln der ϱ-ten Stufe ist. Daher muss $\varphi_0(x'y)$ mit $\varphi_i(xy)$ bis auf einen Factor identisch sein, der im allgemeinen nicht mit φ_0 und φ_i zugleich null ist. Ist x' mit x durch die Substitution der ϱ-ten Stufe,

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}$$

verbunden, so ist

$$\varphi_i(xy) = \frac{(cx-a)^N}{(ad-bc)^N}\cdot\varphi_0\left(\frac{-dx+b}{cx-a}, y\right)$$

Jeder Factor φ_i kann also aus φ_0 abgeleitet werden, indem man die Variabele x in φ_0 einer Substitution der ϱ-ten Stufe unterwirft. Es ist leicht einzusehen, dass man erstlich so alle Factoren aus φ_0 ableiten kann, und dann wegen des Gruppencharakters der Substitutionen der ϱ-ten Stufe, dass man so aus jedem Factor φ_i alle anderen ableiten kann. Hieraus folgt:

Uebt man auf x eine Substitution der ϱ-ten Stufe aus, so werden in $F(xy) = \Pi\varphi_i(xy)$ die Factoren φ nur vertauscht.[1])

Da weiter $\pm F(xy) = F(yx) = \Pi\varphi_\varkappa(yx)$ und jedes $\varphi_\varkappa(yx)$ gleich einem $\varphi_i(xy)$ sein muss, so folgt:

Auch wenn man auf y eine der Substitutionen der ϱ-ten Stufe ausübt, werden die Factoren φ_i nur vertauscht.

Da man aus einem Factor $\varphi_i(xy)$ also die andern in einfacher Weise durch lineare Substitutionen ableiten kann, so genügt die Ableitung eines derselben, und kann man daher einen einzelnen als

1) Vergleiche bei Herrn Gierster Annalen XXI, 9.

Modulargleichung für die Transformation n. Ordnung bezeichnen, und zwar wollen wir von den P Factoren φ_i im Folgenden stets φ_0 herausgreifen.

Wenn so das Product F bei P^2 Simultansubstitutionen in sich übergeht, so muss jeder der P Factoren φ_i bei P simultanen Substitutionen des x und des y in sich übergehen.[1]) Denn übt man auf x eine der P Substitutionen der ϱ-ten Stufe aus, so geht φ_i in einen andern Factor $\varphi_\varkappa$ über, und $\varphi_\varkappa$ geht nur durch eine ganz bestimmte Substitution des y in φ_i über.

Dabei ist jedoch Folgendes zu beachten. Die P^2 Simultansubstitutionen setzen sich zusammen aus der „Doppelidentität" $x' = x$, $y' = y$; aus $2(P-1)$ Substitutionen, bei denen nur x oder nur y substituirt werden, und endlich aus $(P-1)^2$ eigentlichen Simultansubstitutionen, bei denen x und y substituirt werden. Die erstgenannte Substitution $x' = x$, $y' = y$ lässt natürlich alle Factoren ungeändert, die $2(P-1)$ zweiterwähnten Substitutionen lassen keinen Factor ungeändert, und jede der übrigen $(P-1)^2$ lässt einen oder einige Factoren in sich übergehen. Jeder Factor geht bei $P-1$ Simultansubstitutionen (ausser der Identität $x' = x$, $y' = y$) in sich über, was $P(P-1)$ eigentliche Simultansubstitutionen ergäbe; da aber nur $(P-1)^2$ solcher Simultansubstitutionen existiren, so müssen einige derselben wiederholt auftreten. Es seien nun $\varphi_i(xy)$ und $\varphi_\varkappa(xy)$ zwei Factoren, welche bei der Simultansubstitution

$$x' = D(x) = (x)D, \quad y' = E(y) = (y)E$$

in sich übergehen, d. h. es sei

$$\varphi^i((x)D,\ (y)E) = \varphi_i(x, y)$$

und

$$\varphi_\varkappa((x)D,\ (y)E) = \varphi_\varkappa(x, y)$$

und sei ferner

$$\varphi_i(x, y) = \varphi_\varkappa((x)C, y)$$

so ist auch

$$\varphi_i((x)D,\ (y)E) = \varphi_\varkappa((x)C, y)$$

d. h.

$$= \varphi_\varkappa((x)CD,\ (y)E)$$

$$= \varphi_i((x)CDC^{-1},\ (y)E)$$

Daher muss

$$D = CDC^{-1}$$

sein. Zwei Factoren φ_i und $\varphi_\varkappa$ haben also dann und nur dann eine Simultansubstitution gemeinsam, wenn sich zur Substitution C (die φ_i in $\varphi_\varkappa$ überführt) eine Substitution D so finden lässt, dass $DC = CD$.

1) ibid. pg. 11.

Gehen φ_i und $\varphi_\varkappa$ bei der Substitution $x' = D(x)$, $y' = E(y)$ in sich über, so tun sie es natürlich auch bei Iterationen $x' = D^2(x)$, $y' = E^2(y)$ u. s. w. Zählt man diese mit, so müssen sich gerade $P-1$ solcher Simultansubstitutionen D, E zeigen. Da sich ferner alle Substitutionen einer Stufe aus zwei passend gewählten Substitutionen zusammensetzen lassen, (zwei beliebige Substitutionen können auch nur eine Untergruppe ergeben,) so dürfen zwei Factoren φ_i, $\varphi_\varkappa$ nie zwei Paare Simultansubstitutionen von der Eigenschaft gemeinsam haben, dass sich aus den Substitutionen des x, oder des y, alle Substitutionen der betreffenden Stufe zusammensetzen lassen.

Hieraus folgt noch: hat ein Factor $\varphi_\varkappa(xy)$ der Modulargleichung die Eigenschaft, in sich überzugehen, wenn x und y simultan den nämlichen Substitutionen unterworfen werden, so ist direct $\varphi_i(xy) = \pm \varphi_i(yx)$. Denn wäre $\varphi_i(yx)$ gleich einem anderen Factor $\varphi_\varkappa(xy)$, so hätten φ_i und $\varphi_\varkappa$ die nämlichen P Simultansubstitutionen gemeinsam, (da x und y den nämlichen Substitutionen unterworfen werden sollen,) und da das nach dem ebenbewiesenen Satze nicht möglich ist, muss $\varphi_i(xy) = \pm \varphi_i(yx)$ sein.

Hat man nun für eine der Functionen $x = f(\omega)$, also etwa für $m_1(\omega)$ der früheren Bezeichnung, die Modulargleichung $\varphi_0(x_1 y_1) = 0$ aufgestellt, so erübrigt noch, für die übrigen $P-1$ Functionen m_c dasselbe zu tun. Man hat zu diesem Zwecke einfach x und y simultan je den nämlichen Simultansubstitutionen der ϱ-ten Stufe zu unterwerfen, da die Functionen m_c mit m_1 durch diese Substitutionen zusammenhangen und erhält so im allgemeinen für die P Functionen P Modulargleichungen, von denen jedoch einige oder alle identisch sein können, jenachdem φ_0 in sich oder in einen anderen Factor übergeht, wenn x und y simultan den nämlichen Substitutionen unterworfen werden.

§ 9.

Zuordnung der Simultansubstitutionen.

Nachdem wir erkannt haben, dass die Transformation n-ter Ordnung der Galois'schen Hauptmoduln ϱ-ter Stufe durch eine Gleichung $\varphi(xy) = 0$ charakterisirt ist, die x und y bis zur N-ten Potenz enthält, und bei P Simultansubstitutionen des x und y in sich übergeht, schliesst sich hieran die Aufgabe, diese Simultansubstitutionen wirklich aufzustellen. Da jeder Substitution, des x sowol, als des y, eine lineare ω-Substitution entspricht, so hat man zunächst zu untersuchen, wie die ω-Substitutionen einander zugeordnet sind.

Es werde also das Argument von x der Substitution

$$\omega' = \frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

unterworfen, ebenso das von y der Substitution

$$\omega' = \frac{c + d\omega}{a + b\omega} \qquad (ad - bc = 1)$$

Sollen nun diese Substitutionen im eben definirten Sinne einander zugeordnet sein, so muss, wenn die Repräsentanten in der Form

$$\omega_x = \frac{1}{n}\frac{\gamma_x + \delta_x\omega}{\alpha_x + \beta_x\omega}, \quad \alpha_x : \beta_x : \gamma_x : \delta_x \equiv 1:0:0:1 \bmod \varrho,$$

angenommen werden

$$\frac{1}{n}\frac{\gamma_x + \delta_x\dfrac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}}{\alpha_x + \beta_x\dfrac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}} = \frac{c + d\dfrac{1}{n}\dfrac{\gamma_x+\delta_x\omega}{\alpha_x+\beta_x\omega}}{a + b\dfrac{1}{n}\dfrac{\gamma_x+\delta_x\omega}{\alpha_x+\beta_x\omega}} \tag{16}$$

sein, d. h.

$$\frac{(\alpha\gamma_x + \gamma\delta_x) + (\beta\gamma_x + \delta\delta_x)\omega}{n(\alpha\alpha_x + \gamma\beta_x) + n(\beta\alpha_x + \delta\beta_x)\omega} = \frac{(nc\alpha_x + d\gamma_x) + (nc\beta_x + d\delta_x)\omega}{(na\alpha_x + b\gamma_x) + (na\beta_x + b\delta_x)\omega} \tag{16a}$$

Da nun

$$n\,(\alpha\alpha_x + \gamma\beta_x)(\beta\gamma_x + \delta\delta_x) - (\alpha\gamma_x + \gamma\delta_x).\,n(\beta\alpha_x + \delta\beta_x)$$
$$= n\,(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha_x\delta_x - \beta_x\gamma_x) = n$$

$$nn\,a\alpha_x + b\gamma_x)\,(nc\beta_x + d\delta_x) - (nc\alpha_x + d\gamma_x)(na\beta_x + b\delta_x)$$
$$= n\,(ad - bc)(\alpha_x\delta_x - \beta_x\gamma_x) = n$$

so wird die Gleichung (16a) sicher erfüllt, wenn

$$\begin{aligned}
\alpha\gamma_x + \gamma\delta_x &= \varepsilon\,(nc\alpha_x + d\gamma_x)\\
\beta\gamma_x + \delta\delta_x &= \varepsilon\,(nc\beta_x + d\delta_x)\\
n\,(\alpha\alpha_x + \gamma\beta_x) &= \varepsilon\,(na\alpha_x + b\gamma_x)\\
n\,(\beta\alpha_x + \delta\beta_x) &= \varepsilon\,(na\beta_x + b\delta_x)
\end{aligned} \tag{17}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$ ist. Nach a, b, c, d aufgelöst, ergeben die Gleichungen (17)

$$\begin{aligned}
a &= \varepsilon\,[\alpha\alpha_x\delta_x - \beta\alpha_x\gamma_x + \gamma\beta_x\delta_x - \delta\beta_x\gamma_x]\\
b &= n\varepsilon\,[-\alpha\alpha_x\beta_x + \beta\alpha_x{}^2 - \gamma\beta_x{}^2 + \delta\alpha_x\beta_x]\\
nc &= \varepsilon\,[\alpha\gamma_x\delta_x - \beta\gamma_x{}^2 + \gamma\delta_x{}^2 - \delta\gamma_x\delta_x]\\
d &= \varepsilon\,[-\alpha\beta_x\gamma_x + \beta\alpha_x\gamma_x - \gamma\beta_x\delta_x + \delta\alpha_x\delta_x]
\end{aligned} \tag{18}$$

Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können wir $\varepsilon = +1$ setzen; es bedeutet dies nur, dass die beiden Substitutionen

$$\omega' = \frac{c + d\omega}{a + b\omega} \quad \text{und} \quad \omega' = \frac{-c - d\omega}{-a - b\omega}$$

als gleichwertig betrachtet werden. Ferner muss noch

$$\alpha\gamma_\varkappa\delta_\varkappa - \beta\gamma_\varkappa^2 + \gamma\delta_\varkappa^2 - \delta\gamma_\varkappa\delta_\varkappa \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, n) \tag{19}$$

sein, damit c ganzzahlig werde. Denken wir uns α, β, γ, δ gegeben, so können wir über diese Werte, die ja nur *modulo* ϱ in betracht kommen, so verfügen, dass Gleichung (19) erfüllt wird, da n und ϱ teilerfremd sein sollen. Da endlich

$$\alpha_\varkappa : \beta_\varkappa : \gamma_\varkappa : \delta_\varkappa \equiv 1:0:0:1 \pmod{\varrho}$$

so folgt noch, dass zwischen den Grössen a, b, c, d und α, β, γ, δ die Relationen bestehen

$$a:b:nc:d \equiv \alpha:n\beta:\gamma:\delta \text{ (modulo } \varrho) \tag{20}$$

Damit ist die Zuordnung der x-Substitutionen zu den y-Substitutionen bereits geleistet. Man hat zu einer x-Substitution nur (in der Ende § 4. angegebenen Weise) die ω-Substitution $\frac{\gamma + \delta\omega}{\alpha + \beta\omega}$ und zu diesem Wertesystem $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ vermittels Gleichung (20) das entsprechende System $a:b:c:d$ zu bestimmen. Dann findet man mittels der § 4. angegebenen Formeln und Tabellen zu $\omega' = \frac{c + d\omega}{a + b\omega}$ die y-Substitution zunächst für die mit m_1 bezeichnete Function und dann für jede andere Function m_c.

Es genügt diese Zuordnung für zwei geeignete Paare Simultansubstitutionen aufzustellen. Denn gehe die Gleichung $\varphi_i(xy) = 0$ in sich über erstlich bei der Substitution $x' = C(x)$, $y' = C_1(y)$ und ferner bei $x' = D(x)$, $y' = D_1(y)$, so entspricht der x-Substitution $C^\varrho D^\sigma C^\tau \ldots$ eo ipso die y-Substitution $C_1^\varrho D_1^\sigma C_1^\tau \ldots$, und da sich alle Substitutionen der ϱ-ten Stufe aus geeigneten zweien durch Combination und Wiederholung zusammensetzen lassen, so werden wir etwa zu $x' = A(x)$ und $x' = B(x)$ die entsprechenden y-Substitutionen aufsuchen, und haben damit die Frage nach der Zuordnung der Simultansubstitutionen erledigt.

Am einfachsten stellen sich die Verhältnisse dar, wenn $n \equiv 1$ *modulo* ϱ, dann ist einfach

$$a:b:c:d = \alpha:\beta:\gamma:\delta \pmod{\varrho}$$

d. h. x und y erfahren simultan die nämlichen Substitutionen.

Als der nächst einfachste Fall ergibt sich $n \equiv -1$ *modulo* ϱ, für diesen wird

$$a:b:c:d \equiv \alpha:-\beta:-\gamma:\delta \pmod{\varrho}$$

und es zeigt sich, dass die hierher gehörigen drei Fälle $n \equiv -1$ *mod* 3, 4, 5 sich nach übereinstimmenden Methoden behandeln lassen.

Hiermit sind für $\varrho = 2, 3, 4$ sämtliche Fälle erschöpft, und es bleiben noch drittens die beiden Fälle $n \equiv \pm 2$ *mod* 5, die sich gleichfalls zusammen behandeln lassen.

§ 10.

Der Fall $n \equiv 1 \pmod{\varrho}$.

Hier handelt es sich um die Aufstellung einer Modulargleichung $\varphi(xy) = O$, die in sich übergeht, wenn x und y den nämlichen linearen Substitutionen unterworfen werden. Führen wir, um die dabei auftretenden Nenner zu vermeiden, homogene Variabeln ein, setzen also $x = \frac{x_1}{x_2}$, $y = \frac{y_1}{y_2}$, so erhalten wir, da x und y bis zur N-ten Potenz ansteigen, eine doppeltbinäre Form $\varphi(x_1 x_2 y_1 y_2)$ N-ter Ordnung in beiden Variabelreihen, die bei P Simultansubstitutionen von x_1, x_2, y_1, y_2 in sich übergeht.

Soll die homogen geschriebene Modulargleichung dabei (nicht blos bis auf einen constanten Factor) in sich übergehen, so müssen, wie leicht einzusehen, die Substitutionen die Determinante $+1$ haben x_1, x_2, y_1, y_2 bedeuten Modulformen, und die den linearen ω-Substitutionen entsprechenden linearen Substitutionen dieser Modulformen haben beim Doppelverhältniss, der Tetraeder- und der Octaederirrationalität zunächst noch die Determinante -1, bezüglich $\alpha = \sqrt[3]{1}$, sie können jedoch, wie es bereits geschehen, durch einen Zusatzfactor (i, bez. α) auf die Determinante 1 gebracht werden, was für die nichthomogenen Substitutionen, also auch für die nichthomogen zu schreibende Modulargleichung ohne Einfluss, für die folgenden Betrachtungen (mit homogenen Variabeln) aber wesentlich vereinfachend ist.

Für die Untersuchung der Eigenschaften und Aufstellung der oben beschriebenen doppeltbinären Formen bieten sich zwei Wege dar. Nach der einen Methode schreibt man zunächst doppeltbinäre Formen der verschiedenen Ordnungen mit unbestimmten Coefficienten hin, unterwirft sie den Simultansubstitutionen, wobei man noch durch zweckmässige Abkürzungen die Rechnung sehr vereinfachen kann, und vergleicht die neu erhaltenen Formen mit den alten. Dadurch

ergeben sich eine Reihe Relationen zwischen den Coefficienten und findet man dann mit verhältnissmässig nicht übergrossem Rechnungsaufwand für die ersten Ordnungen bis etwa zur sechsten, dass alle in Betracht kommenden doppeltbinären Formen der verlangten Substitutionseigenschaft sich aus einigen wenigen Formen niederer Ordnung und derselben Eigenschaft rational zusammensetzen.[1]) Dieser directe Weg liess jedoch nicht übersehen, dass auch die Formen beliebighoher Ordnung rational aus denen niederer Ordnungen zusammensetzbar sind. Dieser Nachweis ergibt sich in ziemlich einfacher Weise, wenn man das Formensystem mittels einiger invariantentheoretischer Sätze aufzustellen sucht, wie es im Folgenden geschehen soll.

Setzen wir in $\varphi(x_1 x_2 y_1 y_2)$ einmal $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, so erhalten wir eine einfachbinäre Form der $2N$-ten Ordnung:

$$\varphi(x_1 x_2 x_1 x_2) = \psi(x_1 x_2)$$

die bei gewissen P Substitutionen in sich übergeht. Solch eine Substitution sei

$$x_1' = ax_1 + bx_2, \qquad x_2' = cx_1 + dx_2; \qquad (ad - bc = +1)$$

Dann ist also

$$\psi(x_1, x_2) = \psi(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$$

folglich

$$\frac{\partial \psi(x_1 x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)}{\partial(ax_1 + bx_2)} a + \frac{\partial \psi(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)}{\partial(cx_1 + dx_2)} c$$

$$\frac{\partial \psi(x_1 x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)}{\partial(ax_1 + bx_2)} b + \frac{\partial \psi(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)}{\partial(cx_1 + dx_2)} d$$

und daher

$$\frac{\partial \psi(x_1 x_2)}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \psi(x_1 x_2)}{\partial x_2} y_2 = \frac{\partial \psi(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)}{\partial(ax_1 + bx_2)} (ay_1 + by_2) + \frac{\partial \psi(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)}{\partial(cx_1 + dx_2)} (cy_1 + dy_2)$$

d. h. auch die Form

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} y_2$$

---

1) Auf diesem Wege suchte ich zunächst das volle System der Doppelverhältnissformen und der Tetraederformen aufzustellen; die wachsende Complicirtheit der Substitutionen beim Oktaeder und Ikosaeder drängte jedoch dazu, einen andern Weg zu suchen, und so gelangte ich zu dem hier dargelegten Wege.

geht in sich über, wenn x_1, x_2 und y_1, y_2 simultan den nämlichen Substitutionen unterworfen werden, die $\psi(x_1x_2)$ in sich überführen. Diese aus ψ abgeleitete Form

$$\psi_1(x_1x_2y_1y_2) = \frac{1}{2N}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}y_2\right]$$

bezeichnet man bekanntlich als erste Polare von $\psi(x_1x_2)$ nach y.[1]) Es leuchtet ein, dass bei Fortsetzung dieses Processes, d. h. bei Bildung von

$$\psi_2(x_1x_2y_1y_2) = \frac{1}{(2N-1)}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}y_2\right)$$
$$= \frac{1}{2N.(2N-1)}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}y_1^2 + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}y_1y_2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}y_2^2\right)$$

u. s. w. sich dieses Verhalten fortsetzt. Zugleich ist infolge des Eulerschen Satzes

$$\psi_1(x_1x_2y_1y_2) = \psi(x_1x_2)$$
$$\psi_2(x_1x_2y_1y_2) = \psi(x_1x_2)$$

u. s. w. wenn $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ gesetzt wird.

So erhalten wir durch N-malige Ausführung dieses „Polarisations-Processes" eine doppeltbinäre Form, die in den beiden Variabelreihen x_1x_2 und y_1y_2 je von N-ter Ordnung ist, und ungeändert bleibt, wenn auf x_1, x_2, y_1, y_2 die Substitutionen ausgeübt werden, die $\varphi(x_1x_2y_1y_2)$ ungeändert lassen. Bezeichnen wir die N-malige Polarisation von $\psi(x_1x_2)$ durch eine eckige Klammer und den Index N, also $[\psi(x_1x_2)]_N$, so ist

$$\{\varphi(x_1x_2y_1y_2) - [\psi(x_1x_2)]_N\}_{x=y} = O$$

d. h. φ und $[\psi]_N$ können sich nur um Glieder unterscheiden, die für $x = y$ verschwinden, den Factor $x - y$, homogen $x_1y_2 - x_2y_1$ tragen. Daher ist

$$\varphi(x_1x_2y_1y_2) = [\varphi(x_1x_2x_1x_2)]_N + (x_1y_2 - x_2y_1)\cdot\varphi_1(x_1x_2y_1y_2) \qquad (21)$$

$\varphi_1(x_1x_2y_1y_2)$ ist eine doppeltbinäre Form, die in beiden Variabelreihen von der Ordnung $N-1$ ist. Uebt man jetzt auf (21) eine der Simultansubstitutionen von φ in sich aus,

$$x_1' = ax_1 + bx_2, \quad x_2' = cx_1 + dx_2, \quad y_1' = ay_1 + by_2,$$
$$y_2' = cy_1 + dy_2; \quad (ad - bc = 1)$$

so geht φ und $[\psi]_N$ in sich über, $x_1y_2 - x_2y_1$ wird aber bekanntlich

1) Man vergleiche etwa Clebsch, Binäre Formen S. 13 oder Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie S. 203 ff.

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax_1+bx_2 & cx_1+dx_2 \\ ay_1+by_2 & cy_1+dy_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Wegen dieser Eigenschaft heisst die Form $x_1y_2 - x_2y_1$, die man auch mit (xy) bezeichnet, die identische Covariante. Da also φ, $[\psi]_N$ und (xy) ungeändert bleiben, so muss bei der Ausführung der Simultansubstitutionen auch φ_1 ungeändert bleiben; daher ist φ_1 in der Form darstellbar

$$\varphi_1(x_1x_2y_1y_2) = [\varphi_1(x_1x_2\,x_1x_2)]_{N-1} + (xy)\cdot\varphi_2(x_1x_2y_1y_2)$$

wo φ_2 in x und y von der Ordnung $N-2$ ist und bei den P Simultansubstitutionen in sich übergeht; φ_2 ist daher wieder analog darstellbar. $\varphi_1(x_1x_2y_1y_2)$ ist eine einfachbinäre Form der Ordnung $2N-2$, die jetzt mit $\varphi_{2N-2}(x_1x_2)$ bezeichnet sei. So erkennt man schliesslich, dass φ in der Form darstellbar ist [1])

$$\begin{aligned}\varphi(x_1x_2y_1y_2) = {} & [\varphi(x_1x_2x_1x_2)]_N + (xy)[\varphi_{2N-2}(x_1x_2)]_{N-1} \\ & + (xy)^2[\varphi_{2N-4}(x_1x_2)]_{N-2} + \ldots + (xy)^{N-1}[\varphi_2(x_1x_2)]_1 + c_N(xy)^N \end{aligned} \quad (22)$$

Die Modulargleichung setzt sich also mittels Potenzen der identischen Covariante aus Polaren einfachbinärer Formen mit P Substitutionen in sich rational zusammen.

Die Darstellbarkeit der doppeltbinären Formen mittels Polaren und Potenzen von (xy) ist übrigens nicht eine Folge der speciellen Eigenschaften der Form $\varphi(x_1x_2y_1y_2)$ — diese Eigenschaft zieht nur besondere Eigenschaften der Formen $\varphi_x(x_1x_2)$ nach sich — sondern jede doppeltbinäre Form lässt sich in dieser Weise darstellen. Denn $\varphi(x_1x_2x_1x_2)$ als Form $2N$-ter Ordnung hat $2N+1$ (homogene) Coefficienten, $\varphi_{2N-2}(x_1x_2)$ hat ebenso $2N-1$, u. s. f. bis $\varphi_2(x_1x_2)$ drei und $\varphi_0(x_1x_2) = c_N$ einen Coefficienten hat. Gleichung (22) hat also rechts

$$(2N+1)+(2N-1)+(2N-3)+\ldots+3+1 = (N+1)(N+1)$$

Coefficienten, und ebensoviel hat die doppeltbinäre Form auf der linken Seite.

Wir haben nun zunächst alle einfach binären Formen mit P Substitutionen in sich aufzustellen. Jede solche Form setzt sich [2])

1) Man vergleiche Clebsch, Binäre Formen § 7. Die hier gegebene Ableitung dieses Satzes findet sich bei Herrn Gordan, Annalen 3 („Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen.") p. 364.

2) Annalen IX p. 194 ff. (Binäre Formen mit Substitutionen in sich) und Ikosaeder p. 48 ff.

rational aus Potenzen der wohlbekannten Formen $F_1(x_1x_2)$, $F_2(x_1x_2)$, $F_3(x_1x_2)$ zusammen, (die in den Gleichungen 2. und 3. auftreten,) und kann daher in der Form angenommen werden

$$\varphi_i(x_1, x_2) = F_1^{\alpha} F_2^{\beta} F_3^{\gamma} \Pi_x (a_x F_1^3 + b_x F_2^2)$$

wo $\alpha\beta\gamma$ Ganzzahlen, $a_x b_x$ beliebige Zahlen sind.[1]) Zwischen den Formen F_1, F_2, F_3 besteht natürlich die Relation

$$F_1^3 = F_2^2 + F_3^{\varrho}$$

Da von den Formen φ_i die Polaren zu bilden sind, und die Polare einer Summe gleich der Summe der Polaren der Summanden ist, so genügt es also, von allen Formen

$$F_1^a F_2^b F_3^c$$

diejenigen zu polarisiren, die gerader Ordnung sind und bei den Substitutionen der ϱ-ten Stufe in sich übergehen (den Factor $+1$ erhalten). Haben diese Substitutionen die Determinante 1, so erhalten F_1^3, F_2^2 und F_3^{ϱ} dabei einen Factor, dessen absoluter Betrag 1 ist. Dieser Factor kann also nur $+1$ oder eine Einheitswurzel sein, (eine zweite, dritte, vierte, oder fünfte) da andere Irrationalitäten in den Substitutionsformeln nicht auftreten, und werden daher bei jeder Stufe Formen $F_1^{3\nu}$, $F_2^{2\nu}$, $F_3^{\varrho\nu}$ ungeändert bleiben, wobei $\nu \leqq 5$ angenommen werden kann. Man wird also die Einheitswurzeln bestimmen, die F_1, F_2, F_3 bei den Simultansubstitutionen als Factoren er-

1) Dieses Verhalten hat, wie die Invariantentheorie zeigt, seinen Grund darin, dass sich zu F_3 als Grundform F_1 als Hesse'sche Form, F_2 als Functionaldeterminante von F_1 und F_3 ergibt. Die Identität $F_1^3 = F_2^2 + F_3^{\varrho}$ ist nur ein Specialfall des allgemeinen Satzes, dass zwischen Grundform, Hessescher Form und Functionaldeterminante stets eine gewisse Identität besteht. Zugleich sei an dieser Stelle auf den Unterschied hingewiesen, der zwischen unsern speciellen Betrachtungen und den allgemeinen Ueberlegungen der Invariantentheorie besteht. Er beruht im wesentlichen darauf, dass wir hier nur die endliche Anzahl linearer Transformationen in Betracht ziehen, die die Formen F_3, F_1, F_2 in sich überführen. Die Invariantentheorie operirt jedoch mit allgemeinen Formen (mit allgemeinen Coefficienten), und mit der Gesamtheit der linearen Transformationen. Sie zeigt, dass man das nämliche Resultat erhält, ob man erst die Grundform einer linearen Transformation unterwirft und dann von der transformirten Form die Hesse'sche Form und die Functionaldeterminante bildet, oder ob man erst von der Grundform die beiden andern Formen ableitet und dann transformirt. Bleibt noch, wie es hier der Fall ist, die Grundform bei einer (endlichen) Anzahl linearer Transformationen ungeändert, so müssen es infolgedessen auch die abgeleiteten beiden Formen bei den nämlichen Transformationen bleiben.

halten, und dann die niedersten Formen $F_1^a F_2^b F_3^c$ bilden, welche den Factor 1 bei den Substitutionen erhalten. So ergeben sich eine Reihe verschiedene Formen $G_\varkappa = F_1^a F_2^b F_3^c$, wobei man noch $0 \leqq a \leqq 3\nu$, $0 \leqq b \leqq 2\nu$, $0 \leqq c \leqq \varrho\nu$ voraussehen kann; die Zahl dieser Formen ist sicher endlich und wird sich im allgemeinen noch mittels der Identität $F_1^3 = F_2^2 + F_3^\varrho$ erheblich reduciren lassen. Ist nun

$$F = F_1^\alpha F_2^\beta F_3^\gamma$$

eine Form beliebig hoher Ordnung, so lässt sie sich in ein Product aus Potenzen der ebenerwähnten Formen $G_\varkappa$ zerlegen. (Diese Zerlegung braucht nicht auf nur eine Weise möglich zu sein.) So sei

$$F = F_1^\alpha F_2^\beta F_3^\gamma = G_1^{\alpha_0} G_2^{\beta_0} G_3^{\gamma_0} G_4^{\delta_0} \ldots$$

und seien $E_1 E_2 E_3$ u. s. f. die aus G_1, G_2, G_3 u. s. f. gebildeten Polaren gleicher Ordnung in beiden Variabelreihen, so ist zufolge Gleichung (22)

$$E_1^{\alpha_0} E_2^{\beta_0} E_3^{\gamma_0} E_4^{\delta_0} \ldots = [G_1^{\alpha_0} G_2^{\beta_0} G_3^{\gamma_0} G_4^{\delta_0} \ldots] + (xy)[\psi_{2l-2}]_{l-1} + \ldots$$

wenn die Ordnung von F mit $2l$ bezeichnet wird. Die zu berechnende Polare der Form $2l$-ter Ordnung drückt sich also rational durch die Polaren $E_1 E_2 \ldots$ und Polaren von Formen $(2l-2)$-ter und niederer Ordnungen aus. Ebenso ist die Polare der Form $(2l-2)$-ter Ordnung wieder auf Polaren niederer Ordnungen zurückführbar, und so folgt:

Die Modulargleichung ist im Falle $n \equiv 1$ *modulo* ϱ rational aus einer endlichen Anzahl Polaren $(E_\varkappa)$ und Potenzen von (xy) darstellbar.

Die Modulargleichung kann also in der Form geschrieben werden

$$\mathrm{Rat}((xy),\ E_1, E_2, E_3 \ldots) = 0$$

oder wenn wir gerade und ungerade Potenzen von (xy) trennen:

$$\varphi(x_1 x_2 y_1 y_2) = R_1((xy)^2,\ E_1, E_2 \ldots) + (xy) R_2((xy)^2 E_1, E_2, \ldots) = 0$$

Bei Vertauschung von x und y entsteht, da (xy) das Zeichen wechselt, E_1, E_2 u. s. w. aber unverändert bleiben,

$$\varphi(y_1 y_2 x_1 x_2) = \pm \varphi(x_1 x_2 y_1 y_2) = R_1 - (xy).R_2$$

also entweder $\varphi = R_1$ oder $\varphi = (xy).R_2$. Letzteres ist aber nicht möglich, da φ irreducibel sein soll, und wird daher

$$\varphi(xy) = \varphi(yx) = R((xy)^2,\ E_1 E_2 E_3 \ldots) \qquad (23)$$

Die Modulargleichung bleibt also bei Vertauschung von x und y ungeändert.

Zuletzt sei noch darauf hingewiesen, dass in diesem Falle $n \equiv 1$ sämtliche P Moduln dieselbe Modulargleichung ergeben, da die $P-1$ übrigen Modulargleichungen aus einer erhalten werden, wenn man in ihr x und y gleichzeitig den nämlichen Substitutionen der ϱ-ten Stufe unterwirft.

§ 11.

Der Fall $n \equiv -1$ modulo ϱ.

Hier entspricht der Substitution S, d. h. $\omega' = \omega + 1$, homogen

$$\omega_1' = \pm\,\omega_1, \quad \omega_2' = \pm\,(\omega_1 + \omega_2)$$

d. h. $\alpha:\beta:\gamma:\delta \equiv 1:0:1:1$, die Substitution $1:0:-1:1$, d. h. $\omega_1' = \pm\,\omega_1$, $\omega_2' = \pm\,(-\omega_1 + \omega_2)$, nichthomogen $\omega' = \omega - 1$, d. h. $S-1$.

Der ω-Substitution T, d. h. $\omega' = -\frac{1}{\omega}$, homogen $\omega_1' = \pm\,\omega_2$, $\omega_2' = \mp\,\omega_1$, $(\alpha:\beta:\gamma:\delta \equiv 0:\pm 1:\mp 1:0)$ entspricht ebenso $\omega_1' = \mp\,\omega_2$, $\omega_2' = \pm\,\omega_1$ $(\alpha:\beta:\gamma:\delta \equiv 0:\mp 1:\pm 1:0)$, nichthomogen $\omega' = -\frac{1}{\omega}$, d. h. T.

Entspricht nun bei der Function x_I (also a_I oder O_I oder η_I), auf deren Betrachtung wir uns hier beschränken wollen, der ω-Substitution T die Substitution:

$$x_1' = \pm\,(ax_1 + bx_2), \quad x_2' = \pm\,(cx_1 + dx_2)$$

so lautet die zugehörige y-Substitution:

$$y_1' = \mp\,(ax_1 + bx_2) \qquad y_2' = \mp\,(cx_1 + dx_2)$$

da die Substitution $\omega_1' = \mp\,\omega_2$, $\omega_2' = \pm\,\omega_1$ durch Combination der beiden Substitutionen $\omega_1' = \pm\,\omega_2$, $\omega_2' = \mp\,\omega_1$ und $\omega_1' = -\omega_1$, $\omega_2' = -\omega_2$ entsteht, deren ersterer die Substitution $y_1' = \pm\,(ay_1 + by_2)$, $y_2' = \pm\,(cy_1 + dy_2)$, deren letzterer aber $y_1' = -y_1$, $y_2' = -y_2$ entspricht, da y_1, y_2 ($a_1, a_2, o_1, o_2, \eta_1, \eta_2$) Modulformen ungerader Ordnung sind. (Bei der zweiten Stufe findet dieser Zeichenwechsel nicht statt, da λ_1, λ_2 Formen -2-ter Ordnung sind, und überdies $-1 \equiv +1$ *modulo* 2 ist.)

Wir haben daher für $\varrho = 3, 4, 5$ folgende Systeme von Simultansubstitutionen:

Für die dritte Stufe:

$$\begin{aligned} a_1' &= \pm\alpha^2 a_1, & a_2' &= \pm\alpha a_2, \\ b_1' &= \pm\alpha b_1, & b_2' &= \pm\alpha^2 b_2; \\ a_1' &= \frac{\pm 1}{\sqrt{-3}}(a_1+2a_2), & a_2' &= \frac{\pm 1}{\sqrt{-3}}(a_1-a_2), \\ b_1' &= \frac{\mp 1}{\sqrt{-3}}(b_1+2b_2), & b_2' &= \frac{\mp 1}{\sqrt{-3}}(b_1-b_2). \end{aligned} \tag{24a}$$

Für die vierte Stufe:

$$\begin{aligned} o_1' &= \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}o_1, & o_2' &= \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}o_2, \\ p_1' &= \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}p_1, & p_2' &= \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}p_2; \\ o_1' &= \frac{\pm 1}{\sqrt{-2}}(-o_1+o_2), & o_2' &= \frac{\pm 1}{\sqrt{-2}}(o_1+o_2), \\ p_1' &= \frac{\mp 1}{\sqrt{-2}}(-p_1+p_2), & p_2' &= \mp\frac{1}{\sqrt{-2}}(p_1+p_2). \end{aligned} \tag{24b}$$

Endlich für die fünfte Stufe:

$$\eta_1' = \pm\varepsilon^3\eta_1, \quad \eta_2' = \pm\varepsilon^2\eta_2, \quad \zeta_1' = \pm\varepsilon^2\zeta_1, \quad \zeta_2' = \pm\varepsilon^3\zeta_2 \tag{24c}$$

$$\eta_1' = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_1+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta_2], \quad \eta_2' = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}[(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta_1+(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_2],$$

$$\zeta_1' = \frac{\mp 1}{\sqrt{5}}[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\zeta_1+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\zeta_2], \quad \zeta_2' = \frac{\mp 1}{\sqrt{5}}[(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\zeta_1+(\varepsilon-\varepsilon^4)\zeta_2)].$$

Dabei sind die transformirten a, o, η respective mit b, p, ζ bezeichnet. Man erhält die Substitutionen für b_1, b_2; p_1, p_2; ζ_1, ζ_2 aus denen für a_1, a_2; o_1, o_2; η_1, η_2, wenn man überall α durch $\frac{1}{\alpha}=\alpha^2$, i durch $\frac{1}{i}=-i$, ε durch $\frac{1}{\varepsilon}=\varepsilon^4$ ersetzt. Dabei geht $\sqrt{-3}=\alpha-\alpha^2$ über in $\alpha^2-\alpha=-\sqrt{-3}$, $\sqrt{-2}=i\sqrt{2}$ in $-i\sqrt{2}=-\sqrt{-2}$, während $\sqrt{5}=\varepsilon+\varepsilon^4-\varepsilon^2-\varepsilon^3$ seinen Wert behält.

Betrachten wir zunächst nur die ersten Substitutionen der drei Stufen, (die man mit $x'=A_{(x)}$, $y'=A_{(y)}^{-1}$ bezeichnen könnte,) so erhalten wir die y-Substitutionen, die $n\equiv+1 \bmod \varrho$ entsprechen, (also den x-Substitutionen identisch sind,) wenn y_1, y_2 ersetzt werden durch y_2, y_1, oder allgemeiner γy_2, $\gamma' y_1$. Man wird nun versuchen, ob sich durch geeignete Wahl von γ und γ' auch die übrigen (mit B zu

bezeichnenden) Substitutionen $n \equiv -1$ auf die Substitutionen $n \equiv +1$ zurückführen lassen. Das gelingt in der Tat für alle drei Fälle.

Erstens bei der dritten Stufe geht

$$b_1' = \mp \frac{1}{\sqrt{-3}}(b_1 + 2b_2), \quad b_2' = \mp \frac{1}{\sqrt{-3}}(b_1 - b_2),$$

wenn b_1, b_2 durch γb_2, $\gamma' b_1$ ersetzt werden, über in

$$\gamma b_2' = \mp \frac{1}{\sqrt{-3}}(\gamma b_2 + 2\gamma' b_1), \quad \gamma' b_1' = \mp \frac{1}{\sqrt{-3}}(\gamma b_2 - \gamma' b_1);$$

$\gamma = 2$, $\gamma' = -1$ gesetzt, entsteht gerade

$$b_1' = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}(2b_2 + b_1), \qquad b_2' = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}(-b_2 + b_1)$$

Geht $f(a_1 a_2 b_1 b_2)$ bei den zu $n \equiv -1 \pmod 3$ gehörigen Tetraedersubstitutionen in sich über, so geht $f(a_1, a_2, 2b_2, -b_1)$ bei den zu $n \equiv +1 \pmod 3$ gehörigen Tetraedersubstitutionen in sich über. Dasselbe Verhalten zeigt auch $f(2a_2, -a_1, b_1, b_2)$. Nun ist nach den Untersuchungen des vorigen Paragraphen

$$f(a_1, a_2, 2b_2, -b_1) = \varphi(a_1 a_2 b_1 b_2) = \mathrm{Rat}((ab), E_1(a_1 a_2 b_1 b_2), E_2 \ldots)$$

(Es können auch ungerade Potenzen von (ab) auftreten, da man noch nicht weisss, ob auch $f(a_1, a_2, 2b_2, -b_1) = \pm f(b_1 b_2, 2a_2, -a_1)$ ist.) Jedenfalls wird

$$f(a_1 a_2 b_1 b_2) = \mathrm{Rat}\left(E_0, E_1\left(a_1, a_2, -b_2, \frac{b_1}{2}\right), E_2\left(a_1, a_2, -b_2, \frac{b_1}{2}\right) \ldots\right)$$

wo E_0 die $a_1 b_2 - a_2 b_1$ entsprechende Form $a_1 b_1 + 2a_2 b_2$ ist.

Genau dieselben Schlussweisen führen zweitens bei der vierten Stufe zu dem Resultat, dass wenn $f(o_1 o_2 p_1 p_2)$ bei den Substitutionen (24b) in sich übergeht, dann $f(o_1, o_2, -p_2, p_1) = \varphi(o_1 o_2 p_1 p_2)$ bei den zu $n \equiv -1 \bmod 4$ gehörigen Substitutionen in sich übergeht, und dass daher

$$f(o_1 o_2 p_1 p_2) = \mathrm{Rat}(o_1 p_1 + o_2 p_2, E_1(o_1, o_2 - p_2, p_1), E_2 \ldots)$$

Endlich ergibt sich drittens bei der fünften Stufe, dass die Modulargleichung für $n \equiv -1 \bmod 5$ die Gestalt haben muss

$$f(\eta_1 \eta_2 \zeta_1 \zeta_2) = \varphi(\eta_1, \eta_2, -\zeta_2, \zeta_1) \qquad \mathrm{Rat}(\eta_1 \zeta_1 + \eta_2 \zeta_2, E_1(\eta_1, \eta_2, -\zeta_2, \zeta_1) \ldots)$$

wenn $\varphi(\eta_1 \eta_2 \zeta_1 \zeta_2)$ bei den zu $n \equiv +1 \bmod 5$ gehörigen Substitutionen in sich übergeht. So ergibt sich das Resultat:

Auch für $n \equiv -1 \bmod \varrho$ lässt sich die Modulargleichung aus einer endlichen Anzahl Formen rational zusammensetzen.

Auch bei den zu $n \equiv -1$ gehörigen Modulargleichungen ist der ursprüngliche und der transformirte Modul vertauschbar. Denn sei $\varphi(xy) = o$ solch eine Modulargleichung für $x_I = a_I$, o_I oder η_I, und sei

$$\varphi(xy) = \pm \varphi_\varkappa(yx)$$

Da

$$\varphi(A_{(x)}, A_{(y)}^{-1}) = \varphi(xy)$$

so ist

$$\varphi_\varkappa(A_{(y)}^{-1}, A_{(x)}) = \varphi_\varkappa(yx)$$

Führt man diese Operation $x' = A(x)$, $y' = A_{(y)}^{-1}$ $\varrho - 1$ mal aus, so entsteht, da $A^{-(\varrho-1)} = A$ ist,

$$\varphi_\varkappa(A_{(y)}, A_{(x)}^{-1}) = \varphi_\varkappa(yx) \quad \text{und} \quad \varphi^\varkappa(A_{(x)}, A_{(y)}^{-1}) = \varphi_\varkappa(xy)$$

φ und $\varphi_\varkappa$ haben also diese Simultansubstitution gemeinsam. Da ferner noch

$$\varphi(xy) = \varphi(B_x B_y) = \varphi_\varkappa(B_y B_x) = \varphi_\varkappa(yx)$$

so haben φ und $\varphi_\varkappa$ noch eine zweite Simultansubstitution $x' = B_{(x)}$, $y' = B_{(y)}$ gemeinsam, haben also alle Substitutionen gemeinsam und müssen daher identisch sein, so dass $\varphi(xy) = \pm \varphi(yx)$

Um nun noch aus der Modulargleichung für x_I die für x_c abzuleiten, hat man einfach x und y durch C_x^{-1}, C_y^{-1} zu ersetzen, (da $x_I = C^{-1}(x_c)$ u. s. w.) und erhält $\varphi(C_x^{-1}, C_y^{-1}) = 0$. Bezeichnet jetzt C_1 die Substitution, die aus C entsteht, wenn A mit A^{-1} vertauscht wird, so ist auch

$$\varphi((x)C^{-1}, (y)C^{-1}) = \varphi((x)C^{-1}C, (y)C^{-1}C_1) = \varphi(x, (y)C^{-1}C_1)$$

Man erhält also auch die übrigen Modulargleichungen für die Functionen x_c, indem man auf y (oder x) in $\varphi(xy)$ die Substitution $C^{-1}C_1$ ausübt. Die Modulargleichung für x_c wird von der für eine andere Function x_D im allgemeinen verschieden sein, ausser wenn

$$C^{-1}C_1 = D^{-1}D_1$$

Ist $D = BC$, so ist $D_1 = BC_1$ und $D^{-1} = C^{-1}B$, also

$$D^{-1}D_1 = C^{-1}BBC_1 = C^{-1}C_1$$

d. h. die Modulargleichungen für x_c und x_{Bc} sind identisch. Man erhält daher $\frac{1}{2}P$ verschiedene Modulargleichungen für die P Functionen x.

§ 12.

Die Fälle $n \equiv \pm 2$ modulo 5.

Zunächst der Fall $n \equiv +2 \bmod 5$!

Hier entspricht der Substitution $S(\equiv 1:0:1:1 \bmod 5)$ die Substitution $1:0:2:1 \bmod 5$, d. h. S^2. Der Substitution $T(\equiv 0:1:4:0 \bmod 5)$ entspricht eine Substitution $0:2:2:0 \bmod 5$, d. h. eine Substitution der Form

$$\omega' = \frac{(5c_0+2)+5d_0\,\omega}{5a_0+(5b_0+2)\,\omega}$$

wobei

$$25a_0d_0-(5c_0+2)(5b_0+2)=1$$

Solch eine Substitution ist z. B.

$$\omega' = \frac{12+5\omega}{5+2\omega} = 2-\cfrac{1}{-2-\cfrac{1}{2+\omega}}, \text{ d. h. } S^2TS^3TS^2$$

Der Substitution T des Argumentes von η entspricht also $S^2TS^3TS^2$ für das Argument von ζ. Bei der Modulargleichung für η_1 und ζ_1 haben wir also die Simultansubstitutionen

$$\eta' = (\eta)\,A, \quad \zeta' = (\zeta)\,A^2$$

und

$$\eta' = (\eta)\,B, \quad \zeta' = (\zeta)\,A^2BA^3BA^2 = (\zeta)\,CB$$

fertig ausgerechnet:

$$\eta_1' = \pm\,\varepsilon^3\eta_1, \quad \eta_2' = \pm\,\varepsilon^2\eta_2, \quad \zeta_1' = \pm\,\varepsilon\zeta_1, \quad \zeta_2' = \pm\,\varepsilon^4\zeta_2 \tag{25a}$$

und

$$\begin{aligned}
\eta_1' &= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}[-(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_1+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta_2],\\
\eta_2' &= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}[(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\eta_1+(\varepsilon-\varepsilon^4)\eta_2],\\
\zeta_1' &= \mp\frac{1}{\sqrt{5}}[-(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\zeta_1+(\varepsilon^4-\varepsilon)\zeta_2],\\
\zeta_2' &= \mp\frac{1}{\sqrt{5}}[(\varepsilon^4-\varepsilon)\zeta_1+(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\zeta_2]
\end{aligned} \tag{25b}$$

Die Substitution, welche ζ erleidet, kann aus der Substitution des η gefunden werden, indem man in dieser überall ε durch ε^2 ersetzt, wobei $\sqrt{5} = \varepsilon-\varepsilon^2-\varepsilon^3+\varepsilon^4$ das Zeichen wechselt.

Wir stellen noch einige besonders einfache Simultansubstitutionen auf. Der η-Substitution $C = A^2BA^3BA^2B$ entspricht, wie eine kleine Rechnung ergibt, die ζ-Substitution C, und so erhalten wir

$$\eta_1' = \pm \eta_2, \quad \eta_2' = \mp \eta_1, \quad \zeta_1' = \pm \zeta_2, \quad \zeta_2' = \mp \zeta_1 \qquad (25c)$$

Endlich ergeben ganz analoge Betrachtungen, wie wir sie (§ 6) über die Vertauschbarkeit des ursprünglichen und des transformirten Moduls anstellten, dass bei Vertauschung von η und ζ die Modulargleichung in sich übergeht, wenn man nach der Vertauschung noch ζ durch $-\frac{1}{\zeta}$ ersetzt, also bei der Simultansubstitution

$$\eta_1' = \pm \zeta_2, \quad \eta_2' = \mp \zeta_1, \quad \zeta_1' = \pm \eta_1, \quad \zeta_2' = \pm \eta_2 \qquad (25d)$$

Der für den Fall $n \equiv +1$ angewandte Weg der Aufstellung des vollen Formensystems versagt hier, da die betreffenden Formen nur in sich übergehen, wenn man η_1, η_2 und ζ_1, ζ_2 den nämlichen Substitutionen unterwirft. Ausser dem selbstverständlichen, aber in der Durchführung complicirten Wege der Aufstellung mittels unbestimmter Coefficienten bieten sich jedoch zwei andere Wege dar, um das volle Formensystem zu den Substitutionen (25) zu ermitteln. Der erstere rührt von Herrn Gordan[1]) und beruht auf der Weiterbildung gewisser invariantentheoretischer Prozesse. Da Herr Gordan jedoch dabei auch Formen in Betracht zieht, die in beiden Variabelreihen von verschiedener Ordnung sind, so erscheint mir für meine Zwecke der zweite Weg einfacher, der sich an die Theorie der Gleichungen 5. Grades anschliesst, und der im Folgenden dargelegt werden soll.

Wir interpretiren die Grössen $\eta = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ und $\zeta = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ als Parameter für die beiden Geradenschaaren eines Hyperboloides, so dass also jedes Wertepaar η, ζ einen Punkt desselben darstellt. Unterwerfen wir ein gegebenes Wertesystem η_1, η_2, ζ_1, ζ_2 den 120 homogenen Simultansubstitutionen, die den 60 nichthomogenen Ikosaedersubstitutionen entsprechen, so ergeben natürlich je zwei nur durch das Vorzeichen unterschiedene Substitutionen den nämlichen Punkt $\frac{\eta_1}{\eta_2}, \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$, und der Punkt, der das erstgenannte Wertesystem η_1, η_2, ζ_1, ζ_2 darstellt, erhält 60 Lagen. Da die 120 Substitutionen eine Gruppe bilden, so werden durch jede dieser Substitutionen die 60 Punkte zwar permutirt, in ihrer Gesamtheit aber erhalten.

Behufs Aufstellung einer geeigneten Gleichung für die Fläche 2-ter Ordnung führen wir Pentaedercoordinaten ein, d. h. fünf homogene Coordinaten $z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4$, zwischen denen die Identität besteht

---

1) Ueber die Auflösung der Gleichungen vom 5. Grade. Annalen XIII, S. 375.

Setzen wir jetzt

$$z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0 \tag{26a}$$

$$\begin{aligned}
z_0 &= \eta_1\zeta_1 - \eta_2\zeta_1 + \eta_1\zeta_2 + \eta_2\zeta_2 \\
z_1 &= \varepsilon^4\eta_1\zeta_1 - \varepsilon^3\eta_2\zeta_1 + \varepsilon^2\eta_1\zeta_2 + \varepsilon\eta_2\zeta_2 \\
z_2 &= \varepsilon^3\eta_1\zeta_1 - \varepsilon\eta_2\zeta_1 + \varepsilon^4\eta_1\zeta_2 + \varepsilon^2\eta_2\zeta_2 \\
z_3 &= \varepsilon^2\eta_1\zeta_1 - \varepsilon^4\eta_2\zeta_1 + \varepsilon\eta_1\zeta_2 + \varepsilon^3\eta_2\zeta_2 \\
z_4 &= \varepsilon\eta_1\zeta_1 - \varepsilon^2\eta_2\zeta_1 + \varepsilon^3\eta_1\zeta_2 + \varepsilon^4\eta_2\zeta_2
\end{aligned} \tag{26}$$

so erfüllen diese z_i gerade die Bedingung (26a), d. h. sind Pentaedercoordinaten. Ausserdem ist noch identisch für jedes Wertesystem $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$

$$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0 \tag{26b}$$

und dies ist die Gleichung der Fläche 2. Ordnung, auf der wir die Grössen $\eta_1 : \eta_2$ und $\zeta_1 : \zeta_2$ interpretiren. Unterwerfen wir jetzt $\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ den Simultansubstitutionen, so ergibt eine kleine Rechnung, dass bei den Substitutionen (25a) z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 respective übergehen in z_1, z_2, z_3, z_4, z_0, (cyklische Vertauschung,) während (25b) dieselben Grössen z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 überführt in z_0, z_2, z_1, z_4, z_3. Weiter kann man sich auf elementare Weise überzeugen, dass man durch Combination und Wiederholung dieser beiden Operationen, nämlich der cyklischen Vertauschung, welche die Indicesreihenfolge *iklmn* in *klmni* verwandelt, und der zweiten Operation, welche *iklmn* in *illnm* verwandelt, sämtliche geraden Vertauschungen der Indices erhält, d. h. sämtliche Indicespermutationen mit gerader Anzahl Inversionen (bei denen also eine gerade Anzahl Male ein höherer Index vor einen niederen Index tritt). Es können nur Permutationen mit gerader Anzahl Inversionen entstehen, da $z_0 z_1 z_2 z_3 z_4$, wie $z_1 z_2 z_3 z_4 z_0$ und $z_0 z_2 z_1 z_4 z_3$ eine gerade Anzahl Inversionen haben. Bei der Substitution (25d) gehen jedoch z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, über in z_0, z_2, z_4, z_1, z_3, d. h. es entsteht eine Permutation mit einer ungeraden Anzahl Inversionen, und so können wir durch Combination und Wiederholung der Substitutionen (25) sämtliche 120 Permutationen der z_r erhalten. Eine doppeltbinäre Form $\varphi(\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2)$, welche bei den 240 homogenen Simultansubstitutionen ungeändert bleibt, muss sich daher, da zufolge Gleichungen (26)

$$\begin{aligned}
\eta_1\zeta_1 &= 5(z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon^3 z_3 + \varepsilon^4 z_4) \\
\eta_1\zeta_2 &= -5(z_0 + \varepsilon^2 z_1 + \varepsilon^4 z_2 + \varepsilon z_3 + \varepsilon^3 z_4) \\
\eta_2\zeta_1 &= 5(z_0 + \varepsilon^3 z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^4 z_3 + \varepsilon^2 z_4) \\
\eta_2\zeta_2 &= 5(z_0 + \varepsilon^4 z_1 + \varepsilon^3 z_2 + \varepsilon^2 z_3 + \varepsilon z_4)
\end{aligned} \tag{27}$$

ist, als homogene Function von z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 darstellen, die bei sämtlichen Vertauschungen der fünf Grössen z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 bis auf

einen Factor ± 1 in sich übergeht, d. h. muss sich rational aus den symmetrischen Functionen der z, und der Wurzel aus der Discriminante, $\Pi_{i>k}(z_i - z_k)$, zusammensetzen. Da letztere bei ungeraden Vertauschungen der z das Zeichen wechselt, während die symmetrischen Functionen ungeändert bleiben, so schliesst man in ganz ähnlicher Weise wie im Falle $n \equiv +1 \bmod \varrho$, dass zunächst nur das Quadrat, also das Product $\Pi_{i \gtrless k}(z_i - z_k)$, neben den symmetrischen Functionen auftreten kann, und da dieses selbst symmetrische Function ist, so sind nur die symmetrischen Functionen der z ins Auge zu fassen, deren jede eine Form $\varphi(\eta_1 \eta_2 \zeta_1 \zeta_2)$ ergibt. Diese symmetrischen Functionen drücken sich aber bekanntlich rational aus durch die Coefficienten der Gleichung

$$(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4) = z^5+\alpha z^4+\beta z^3+\gamma z^2+\delta z+\varepsilon = 0$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch die Potenzsummen

$$s_i = \sum_{x=0}^{x=4} z_x{}^i$$

für $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Und diese ergeben dann, in η_1, η_2, ζ_1, ζ_2 umgerechnet, folgende Formen[1]), die das volle Formensystem ausmachen:

$$\left.\begin{aligned}
&s_1 = 0, \qquad s_2 = 0,\\
&\varphi = \frac{s_3}{15} = \eta_1{}^3\zeta_1{}^2\zeta_2+\eta_1{}^2\eta_2\zeta_2{}^3+\eta_1\eta_2{}^2\zeta_1{}^3-\eta_2{}^3\zeta_1\zeta_2{}^2\\
&\psi = -\frac{s_4}{20} = -\eta_1{}^4\zeta_1\zeta_2{}^3+\eta_1{}^3\eta_2\zeta_1{}^4+3\eta_1{}^2\eta_2{}^2\zeta_1{}^2\zeta_2{}^2-\eta_1\eta_2{}^3\zeta_2{}^4+\eta_2{}^4\zeta_1{}^3\zeta_2\\
&\chi = \frac{s_5}{5} = \eta_1{}^5\zeta_1{}^5+\eta_1{}^5\zeta_2{}^5-\eta_2{}^5\zeta_1{}^5+\eta_2{}^5\zeta_2{}^5\\
&\qquad +10\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2(-\eta_1{}^3\zeta_1{}^2\zeta_2+\eta_1{}^2\eta_2\zeta_2{}^3+\eta_1\eta_2{}^2\zeta_1{}^3+\eta_2{}^3\zeta_1\zeta_2{}^2)
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

---

1) Diese Formeln sowie die geometrischen Betrachtungen, insbesondere die Einführung der Fläche 2. Ordnung sind, wie bereits erwähnt, der Theorie der Gleichungen des 5. Grades, und zwar insbesondere der Theorie der Hauptgleichungen $z^5 + az^2 + bz + c = 0$ entnommen und sei daher auf das Klein'sche Werk, insbesondere auf Buch II, Capitel 3 verwiesen. Der Gedankengang ist dort gerade umgekehrt, wie hier. Dort werden zunächst die Lagrange'schen Ausdrücke

$$p_i = z_0 + \varepsilon^i z_1 + \varepsilon^{2i} z_2 + \varepsilon^{3i} z_3 + \varepsilon^{4i} z_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

eingeführt, und dadurch eine gewisse Fläche 2. Ordnung, die Hauptfläche $\Sigma z_\nu{}^2 = o$, in die Fläche $p_1 p_4 + p_2 p_3 = 0$ transformirt. Die Geraden der beiden Schaaren werden dann durch die Parameter

$$\lambda = \frac{p_1}{p_2} = -\frac{p_3}{p_4} \quad \text{und} \quad = \frac{p_1}{p_3} = -\frac{p_2}{p_4}$$

charakterisirt und schliesslich

$$p_1 = 5\lambda_1\mu_1, \quad p_2 = -5\lambda_2\mu_1, \quad p_3 = 5\lambda_1\mu_2, \quad p_4 = 5\lambda_2\mu_2$$

gesetzt.

Endlich, was den Fall $n \equiv 3 \bmod 5$ betrifft, so gehen die zugehörigen Formen in sich über durch die Substitutionen

$$\eta_1' = \pm \varepsilon^3 \eta_1, \quad \eta_2' = \pm \varepsilon^2 \eta_2, \quad \zeta_1' = \pm \varepsilon^4 \zeta_1, \quad \zeta_2' = \pm \varepsilon \zeta_2 \tag{29a}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1' &= \pm \frac{1}{\sqrt{5}} [-(\varepsilon - \varepsilon^4)\eta_1 + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\eta_2], \\
\eta_2' &= \pm \frac{1}{\sqrt{5}} [(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\eta_1 + (\varepsilon - \varepsilon^4)\eta_2], \\
\zeta_1' &= \mp \frac{1}{\sqrt{5}} [-(\varepsilon^3 - \varepsilon^2)\zeta_1 + (\varepsilon - \varepsilon^4)\zeta_2], \\
\zeta_2' &= \mp \frac{1}{\sqrt{5}} [(\varepsilon - \varepsilon^4)\zeta_1 + (\varepsilon^3 - \varepsilon^2)\zeta_2]
\end{aligned} \tag{29b}$$

und ergibt sich wieder, dass wenn $\varphi(\eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2)$ eine zu $n \equiv 2$ gehörige Form ist, dann $\varphi(\eta_1, \eta_2, -\zeta_2, \zeta_1)$ eine zu $n \equiv -2 \bmod 5$ gehörige Form ist, und so lautet das volle Formensystem $n \equiv -2 \bmod 5$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \eta_1^3\zeta_1^2 + \eta_1^2\eta_2\zeta_1^3 - \eta_1\eta_2^2\zeta_2^3 + \eta_2^3\zeta_1^2\zeta_2 \\
\psi_1 &= +\eta_1^4\zeta_1^3\zeta_2 + \eta_1^3\eta_2\zeta_2^4 + 3\eta_1^2\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^2 - \eta_1\eta_2^3\zeta_1^4 - \eta_2^4\zeta_1\zeta_2^3 \\
\chi_1 &= \eta_1^5\zeta_1^5 - \eta_1^5\zeta_2^5 + \eta_2^5\zeta_1^5 + \eta_2^5\zeta_2^5 \\
&\quad - 10\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2[\eta_1^3\zeta_1^2\zeta_2 + \eta_1^2\eta_2\zeta_1^3 + \eta_1\eta_2^2\zeta_2^3 - \eta_2^3\zeta_1^2\zeta_2]
\end{aligned} \tag{30}$$

Capitel III.

Wirkliche Aufstellung der Modulargleichungen.

§ 13.

Die Doppelverhältnissmodulargleichungen.

Dieselben bleiben ungeändert, wenn λ und μ simultan den nämlichen Substitutionen unterworfen werden, da der Transformationsgrad n ungerade, also $\equiv 1$ *modulo* 2 angenommen ist. Es genügt, von den Simultansubstitutionen die folgenden zu betrachten:

A. $\lambda_1' = \pm i\lambda_2, \quad \lambda_2' = \pm i\lambda_1, \quad \mu_1' = \pm i\mu_2, \quad \mu_2' = \pm i\mu_1$

B. $\lambda_1' = \pm i(-\lambda_1 + \lambda_2), \quad \lambda_2' = \pm i\lambda_2, \quad \mu_1' = \pm i(-\mu_1 + \mu_2), \quad \mu_2' = \pm i\mu_2$

wobei in den Substitutionen einer Zeile entweder nur die oberen oder nur die unteren Zeichen zu nehmen sind. Die Formen

$$\begin{aligned}
F_1 &= \lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2, \\
F_2 &= 2\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_2^3 \\
F_3 &= \lambda_1^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2^2
\end{aligned}$$

zwischen denen noch eine Identität $4F_1^3 = F_2^2 + 27F_3^2$ besteht, nehmen bei der Substitution A respective die Factoren $-1, \mp i, \pm i$, bei der Substitution B aber respective $-1, \pm i, \mp i$; F_1^3, F_2^2 und F_3^2 nehmen also den Factor -1, so dass die pag. 160 mit ν bezeichnete Grösse hier gleich 2 ist. Wir erhalten also als Formen der niedersten Ordnungen, durch deren Polaren sich Alles ausdrücken lassen muss:

F_1^6, F_2^4, F_3^4 (12. Ordnung); $F_1F_2^2$, $F_1F_3^2$ (8. Ordnung); F_2F_3 (6. Ordnung) und F_1^2 (4. Ordnung).

Durch passende Verwendung der Identität (22) erkennt man, dass sich $(F_1^6)_6$, die sechste Polare von F_1^6, darstellen lässt durch $(F_1^2)_2$ und Polaren von Formen 8. und 4. Ordnung; ebenso ist die 6. Polare von F_3^4 darstellbar durch $(F_3^4)_6$ und Formen niederer Ordnung. Untersucht man so alle die oben angeführten Formen, und beachtet noch die Identität $4F_1^3 = F_2^2 + 27F_3^2$, so ergibt sich schliesslich, dass sich das volle Formensystem ausser aus $(\lambda_2\mu_1 - \mu_2\lambda_1)^2$ zusammengesetzt aus

$$(F_1F_3^2)_4; \quad (F_2F_3)_3; \quad (F_1^2)_2$$

Ausgerechnet lauten diese Formen

1. $A_2 = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2$;

2. Die vierte Polare von $F_1F_3^2 = \lambda_1^6\lambda_2^2 - 3\lambda_1^5\lambda_2^3 + 4\lambda_1^4\lambda_2^4 - 3\lambda_1^3\lambda_2^5 + \lambda_1^2\lambda_2^6$:

$$\begin{aligned} C_4 = {} & \lambda_1^4(15\mu_1^2\mu_2^2 - 15\mu_1\mu_2^3 + 4\mu_2^4) \\ & + \lambda_1^3\lambda_2(40\mu_1^3\mu_2 - 90\mu_1^2\mu_2^2 + 64\mu_1\mu_2^3 - 15\mu_2^4) \\ & + \lambda_1^2\lambda_2^2(15\mu_1^4 - 90\mu_1^3\mu_2 + 144\mu_1^2\mu_2^2 - 90\mu_1\mu_2^3 + 15\mu_2^4) \\ & + \lambda_1\lambda_2^3(-15\mu_1^4 + 64\mu_1^3\mu_2 - 90\mu_1^2\mu_2^2 + 40\mu_1\mu_2^3) \\ & + \lambda_2^4(4\mu_1^4 - 15\mu_1^3\mu_2 + 15\mu_1^2\mu_2^2) \end{aligned} \tag{31a}$$

3. Die dritte Polare von $F_2F_3 = 2\lambda_1^5\lambda_2 - 5\lambda_1^4\lambda_2^2 + 5\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2^5$:

$$\begin{aligned} C_3 = {} & \lambda_1^3(\mu_1^2\mu_2 - \mu_1\mu_2^2) + \lambda_1^2\lambda_2(\mu_1^3 - 3\mu_1^2\mu_2 + \mu_2^3) \\ & + \lambda_1\lambda_2^2(-\mu_1^3 + 3\mu_1\mu_2^2 - \mu_2^3) + \lambda_2^3(\mu_1^2\mu_2 - \mu_1\mu_2^2) \end{aligned} \tag{31b}$$

4. Die zweite Polare von $F_1^2 = \lambda_1^4 - 2\lambda_1^3\lambda_2 + 3\lambda_1^2\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2^3 + \lambda_2^4$:

$$\begin{aligned} C_2 = {} & \lambda_1^2(2\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2 + \mu_2^2) + \lambda_1\lambda_2(-2\mu_1^2 + 4\mu_1\mu_2 - 2\mu_2^2) \\ & + \lambda_2^2(\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2 + 2\mu_2^2) \end{aligned} \tag{31c}$$

Um jetzt die Modulargleichung für Transformation n. Ordnung aufzustellen, berechnen wir zunächst den Grad $N = n\Pi\left(1 + \frac{1}{s}\right)$ der Gleichung und schreiben dann alle Glieder $(\lambda\mu)^{2a}C_2^bC_3^cC_4^d$ hin, für die $2a + 2b + 3c + 4d = N$ ist, und erhalten die Modulargleichung

$$\sum_{\varkappa} \alpha_\varkappa (\lambda\mu)^{2a_\varkappa} C_2{}^{b_\varkappa} C_3{}^{c_\varkappa} C_4{}^{d_\varkappa} = 0,$$

in der nur noch die Coefficienten $\alpha_\varkappa$ zu bestimmen sind.

Zu diesem Zwecke setzen wir für λ und μ die Reihenentwickelungen nach Potenzen von $q = e^{2i\pi\omega}$ ein. Die Theorie der elliptischen Functionen zeigt, dass wenn ω_1 und ω_2 die beiden primitiven Perioden des Legendre'schen elliptischen Integrales 1. Gattung mit dem Doppelverhältniss $\varkappa^2$ sind, und man $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \omega$, $e^{2i\pi\omega} = q$ setzt, alsdann $\varkappa^2 = \lambda$ in die Reihe entwickelbar ist [1])

$$\varkappa^2 = 16\left(\frac{q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}}}{1+2q+2q^4+2q^9\ldots}\right)^4$$
$$= 16q[1-8q+44q^2-192q^3+718q^4-2400q^5+7352q^6\ \ldots] \quad (32)$$

und dass $\varkappa^2$ gerade die als Doppelverhältniss bezeichnete Modulfunction ist, und zwar λ_B, wie man erkennt, wenn man $q=0(\omega=i\infty$ setzt. Um auch für μ eine Reihe zu erhalten, kann man etwa den Repräsentanten $\frac{\omega}{n}$ oder $n\omega$ verwenden und erhält

$$\mu = \lambda_B(n\omega) = 16q^n[1-8q^n+44q^{2n}\ \ldots]$$

Da die obigen Formen C_2, C_3, C_4 für die Einsetzung der Reihen wegen ihrer verhältnissmässigen Complicirtheit unbequem sind, so empfiehlt es sich, etwa die folgenden einfacheren Grundformen einzuführen:

$$D_2 = 2C_2 - A_2 = \lambda_1{}^2(4\mu_1{}^2 - 4\mu_1\mu_2 + \mu_2{}^2) + \lambda_1\lambda_2(-4\mu_1{}^2 + 10\mu_1\mu_2 - 4\mu_2{}^2)$$
$$+\lambda_2{}^2(\mu_1{}^2 - 4\mu_1\mu_2 + 4\mu_2{}^2)$$
$$= (2\lambda_1\mu_1 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 + 2\lambda_2\mu_2)^2 \quad (33a)$$

$$D_3 = C_3$$

$$D_4 = \tfrac{1}{70}(C_4 - 15A_2C_2 + 11A_2{}^2)$$
$$= \lambda_1{}^3\lambda_2(2\mu_1{}^3\mu_2 - 3\mu_1{}^2\mu_2{}^2 + \mu_1\mu_2{}^3) + \lambda_1{}^2\lambda_2{}^2(-3\mu_1{}^3\mu_2 + 6\mu_1{}^2\mu_2{}^2 - 3\mu_1\mu_2{}^3)$$
$$+\lambda_1\lambda_2{}^3(\mu_1{}^3\mu_2 - 3\mu_1{}^2\mu_2{}^2 + 2\mu_1\mu_2{}^3) \quad (33b)$$
$$= (2\lambda_1\mu_1 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 + 2\lambda_2\mu_2)(\lambda_1{}^2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2{}^2)(\mu_1{}^2\mu_2 - \mu_1\mu_2{}^2)$$

1) Man vergleiche bei Sohncke (Crelle's Journal 16, p. 113 ff.) oder Jacobi Fundamenta § 65. (Werke Band 1, Seite 236, Formel 10). Dabei ist (cf. pg. 142)

$$q = e^{-\frac{nK'}{K}} e^{2i\pi\omega}, \text{ da } \omega = \frac{iK'}{2K}.$$

Weiter beachte man, dass die Ordnung N der Modulargleichung wegen des ungeraden Transformationsgrades sicher eine gerade Zahl ist. Da nun C_3 die einzige auftretende Form ungerader Ordnung ist, so können nur gerade Potenzen von C_3 vorkommen, d. h. das volle Formensystem besteht aus A_2, D_2, D_4, C_3^2. Für C_3^2 führen wir wieder eine vereinfachte Form ein:

$$D_6 = \frac{1}{432}[-16C_3^2+8D_2D_4+A_2D_2^2-2A_2D_4-2A_2^2D_2+A_2^3]$$
$$= (\lambda_1^2\lambda_2-\lambda_1\lambda_2^2)^2(\mu_1^2\mu_2-\mu_1\mu_2^2)^2 \qquad (33c)$$

Nichthomogen geschrieben lautet dieses definitiv zu Grunde zu legende volle Formensystem

$$\begin{aligned} A_2 &= (\lambda-\mu)^2, \\ D_2 &= (2-\lambda-\mu+2\lambda\mu), \\ D_4 &= (2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)(\lambda^2-\lambda)(\mu^2-\mu), \\ D_6 &= (\lambda^2-\lambda)^2(\mu^2-\mu)^2, \end{aligned} \qquad (34)$$

wobei noch $D_2D_6-D_4^2=0$ ist.

Für die niedersten Fälle gestaltet sich die Rechnung folgendermassen:

Transformation dritter Ordnung.

Die Modulargleichung ist vom 4. Grade und hat daher die Form:

$$\varphi = \alpha A_2^2+\beta A_2D_2+\gamma D_2^2+\delta D_4 = 0.$$

Die Reihen nach Potenzen von q für A_2, D_2, D_4 beginnen respective mit q^2, q^0, q^1. Die Reihen für A_2^2, A_2D_2, D_2^2, D_4 also mit respective q^4, q^2, q^0, q^1. Da in φ alle Potenzen von q verschwinden müssen, darf zunächst das Glied D_2^2 nicht auftreten ($\gamma=0$), ebenso $A_2D_2(\beta=0)$. Weiter ist

$$A_2^2 = 256^2q^4[1-32q\ \ldots], \quad D_4 = 512q^4[1-32q\ \ldots],$$

daher ist

$$256^2.\alpha+512.\beta = 0,$$
$$\alpha:\beta = 1:-128$$

und die Modulargleichung lautet:

$$A_2^2 = 128D_4,$$

oder

$$(\lambda-\mu)^4 = 128\lambda\mu(1-\lambda)(1-\mu)(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu) \qquad (35a)$$

Transformation fünfter Ordnung.

Die Modulargleichung ist von 6. Ordnung und lautet

$$\alpha D_2^3+\beta D_2^2 A_2+\gamma D_2 A_2^2+\delta A_2^3+\varepsilon D_2 D_4+\zeta A_2 D_4+\vartheta D_6=0.$$

Da $\lambda = 16q\mp\ldots$, $\mu = 16q^5\mp\ldots$, und die Reihen für D_2, A_2, D_4, D_6 mit q^0, q^2, q^6, q^{12} beginnen, so beginnen die Reihen für die sieben in der Modulargleichung möglichen Glieder respective mit q^0, q^2, q^4, q^6, q^6, q^8, q^{12}, und es ergibt sich durch Vergleich der Reihen (die bis q^7 zu benutzen sind)

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta:\varepsilon:\zeta:\vartheta = 0:0:0:1:-16.512:9.512:32.27.512,$$

und so lautet die Modulargleichung:

$$A_2^3-2^{13}D_2D_4+9.512A_2D_4+27\ 2^{14}D_6-0 \qquad (35b)$$

oder

$$(\lambda-\mu)^6=512\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)[16(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)^3-9(\lambda-\mu)^2(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)-32.27\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)].$$

Endlich die Transformation siebenter Ordnung.

Die Modulargleichung ist von 8. Ordnung und lautet

$$\left.\begin{aligned}a_1D_2^4+a_2D_2^3A_2+a_3D_2^2A_2^2+a_4D_2A_2^3+a_5A_2^4+a_6D_2^2D_4\\+a_7A_2D_2D_4+a_8A_2^2D_4+a_9D_4^2+a_{10}A_2D_6\end{aligned}\right\}=0.$$

Das Glied D_2D_6 ist nicht mit hingeschrieben, da es gleich D_4^2 ist. Die Reihen für D_2, A_2, D_4, D_6 beginnen mit q^0, q^2, q^8, q^{16} und daher die Reihen für die einzelnen Glieder mit resp. q^0, q^2, q^4, q^6, q^8, q^{10}, q^{12}, q^{16}, q^{18}. Daher ist $a_1=a_2=a_3=a_4=0$.

Die ausgerechneten Reihen, deren man zur Berechnung der Coefficienten a_5, a_6 bis a_{10} bedarf, lauten:

$$\lambda=16q[1-8q+44q^2-192q^3+718q^4-2400q^5+7352q^6-20992q^7+56549q^8-145008q^9+356388q^{10}-844032q^{11}\ldots]$$

$$\mu=16q^7[1-8q^7\ldots];$$

$$(\lambda-\mu)^2=256q^2[1-16q+152q^2-17.64q^3+4.1611q^4-32.1037q^5+2.76575q^6-16.40407q^7+2.1266491q^8-16.581955q^9+4.8096545q^{10}-128.838243q^{11}\ldots];$$

$$\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)=256q^8[1-24q+300q^2-41.64q^3+2.9063q^4-32.3297q^5-8.67287q^6-8.308931q^7+10401573q^8-16.2542583q^9+4.37351497q^{10}-16.32467557q^{11}\ldots];$$

$$2-\lambda-\mu+2\lambda\mu=2[1-8q+64q^2-11.32q^3+3.512q^4-16.359q^5$$
$$+3.6400q^6-8.7353q^7+256.657q^8-8.56805q^9$$
$$+128.9151q^{10}-32.90633q^{11}\ldots];$$

$$\frac{(\lambda-\mu)^8}{\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)}=2^{24}[1-40q+884q^2-256.55q^3+2.89785q^4$$
$$-128.15151q^5+16\,1147421q^6-8.194\,90909q^7+1208221559q^8$$
$$-32.270\,278\,535q^9+144\,3888\,4001q^{10}-16.22661\,699\,413q^{11}\ldots];$$

$$(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)^5=32[1-40q+15.64q^2-32.535q^3+512.485q^4$$
$$-16.192\,003q^5+256.130\,405q^6-8.40637\,085q^7+512.562\,1885q^8$$
$$-8.2928\,486\,905q^9+128.1381\,403\,513q^{10}-32.389\,4613\,9085q^{11}\ldots];$$

$$(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)^3(\lambda-\mu)^2=2^{11}q^2[1-40q+920q^2-32.485q^3+4.52811q^4$$
$$-16.152\,513q^5+2.1234\,1023q^6-8.279\,10835q^7+2.917\,345\,275q^8$$
$$-8.1731\,777039q^9\ldots];$$

$$(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)(\lambda-\mu)^4=2^{17}q^4[1-40q+880q^2-32.455q^3+8.219\,71q^4$$
$$-16.117\,023q^5+4.4352623q^6-8.180\,789\,85q^7\ldots];$$

$$(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)^2\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)=2^{10}q^8[1-40q+219.4q^2-64.215q^3\ldots];$$

$$(\lambda-\mu)^2\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)=2^{16}q^{10}[1-40q\ldots].$$

Durch den Vergleich der einzelnen Potenzen von q erhalten wir

$$2^{24}a_5:2^5a_6:2^{11}a_7:2^{17}a_8:2^{30}a_9:2^{16}a_{10}=1:-1:76:-1170:-3375:864000,$$

oder

$$256a_5:a_6:a_7:a_8:a_9:a_{10}=1:-2048:19.128:-585:-64.3375:864000.$$

Daher lautet die Modulargleichung:

$$A_2^4-256.2048D_4D_2^2+256.19.128A_2D_2D_4-256.585A_2^2D_4$$
$$-64.256.3375D_2D_6+256.864000A_2D_6=0,$$

oder

$$(\lambda-\mu)^8=256\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)\times \tag{35c}$$
$$\left\{\begin{array}{l}2048.(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)^5-19.128.(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)^3(\lambda-\mu)^2\\ +585(\lambda-\mu)^4(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu)\\ +64.27.125(2-\lambda-\mu+2\lambda\mu^2)^2(1-\lambda)\mu(1-\mu)^2\\ -256.27.125.\lambda(1-\lambda)\mu(1-\mu)(\lambda-\mu)^2\end{array}\right\}$$

Zur Controle für die Richtigkeit der Reihen dienen die Glieder mit q^{11}; sie müssen gerade Null ergeben. In der Tat ist, wie leicht nachzurechnen,

$$16.22661\,699\,413 = 32.389\,461\,39085 - 76.8.173\,177\,039 + 1170.8.180\,78985 + 3375.64.215 + 40.864000.$$

Die Gleichungen für $n = 3$ und $n = 6$ finden sich, allerdings auf anderem Wege abgeleitet, (durch mehrmaliges Quadriren der entsprechenden Modulargleichungen für $\sqrt[8]{\lambda} = u$, $\sqrt[8]{\mu} = v$), bereits bei Jacobi (Fundamenta § 29, Werke Bd. 1., Seite 122 und 123), sowie bei Cayley in den Philosophical transactions von 1874, Bd. 164, Seite 450 und 451). Im Vergleich mit dem dort nötigen Rechnungsaufwand führt die hier dargelegte Methode, wenigstens in den Fällen $n = 3$ und 5, schnell zum Ziel; auch hat man durch Berechnung noch einiger weiterer Glieder der Reihen beliebig viel Controlen für die Richtigkeit der numerischen Rechnung. Aehnliche Controlen sind übrigens auch bei den späteren Beispielen von Modulargleichungen angewandt worden.

§ 14.

Die Tetraedermodulargleichungen.

Hier haben wir die beiden Fälle $n \equiv +1$ und $n \equiv -1$ modulo 3 zu unterscheiden und getrennt zu behandeln.

1) $n \equiv +1 \bmod 3$.

Die zugehörigen Formen bleiben bei den Simultansubstitutionen

$$a_1' = \pm \alpha^2 a_1, \quad a_2' = \pm \alpha a_2, \quad b_1' = \pm \alpha^2 b_1, \quad b_2' = \pm \alpha b_2;$$

und

$$a_1' = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}(a_1 + 2a_2), \quad a_2' = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}(a_1 - a_2),$$

$$b_1' = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}(b_1 + 2b_2), \quad b_2' = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}(b_1 - b_2);$$

ungeändert. Die Formen

$$F_1 = a_1^3 a_2 - a_2^4,$$
$$F_2 = a_1^6 - 20 a_1^3 a_2^3 + a_2^6,$$
$$F_3 = a_1^4 + 8 a_1 a_2^3$$

erhalten bei diesen Substitutionen respective die Factoren α, 1, α^2, und 1, 1, 1. Die niedersten in Betracht kommenden Formen sind also

F_3 (6. Ordnung); $F_1 F_3$ (8. Ordnung); F_1^3, F_2^2 (12. Ordnung),

von denen wegen der Identität $64F_1^3 + F_2^2 = F_3^2$ nur etwa die folgenden drei in Betracht kommen:

$$F_2, \quad F_1F_3, \quad F_1^3$$

deren respective 3., 4., 6. Polaren lauten

(36)

$$C_3 = a_1^3b_1^3 - (a_1^3b_2^3 + 9a_1^2a_2b_1b_2^2 + 9a_1a_2^2b_1^2b_2 + a_2^3b_1^3) - 8a_2^3b_2^3;$$

$$C_4 = 5(a_1b_2 + a_2b_1)(a_1^3b_1^3 - 8a_2^3b_2^3) + a_1^4b_2^4 + 4^2a_1^3a_2b_1b_2^3 + 6^2a_1^2a_2^2b_1^2b_2^2 + 4^2a_1a_2^3b_1^3b_2 + a_2^4b_1^4;$$

$$C_6 = 14(a_1^3b_1^3 + a_2^3b^{23})(2a_1^3b_2^3 + 9a_1^2a_2b_1b_2^2 + 9a_1a_2^2b_1^2b_2 + 2a_2^3b_1{}_3) - (a_1^6b_2^6 + 6^2a_1^5a_2b_1b_2^5 + 15^2a_1^4a_2^2b_1^2b_2^4 + 20^2a_1^3a_2^3b_1^3b_2^3 + 15^2a_1^2a_2^4b_1^4b_2^2 + 6^2a_1a_2^5b_1^5b_2 + a_2^6b_1^6).$$

An Stelle dieser Formen, die mit $A_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2$ das volle Formsystem bilden, führen wir für die numerische Rechnung mit den Potenzreihen nach q bequemer ein:

(37)

$$A_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2,$$
$$D_3 = -C_3,$$
$$D_4 = \tfrac{1}{5}(6A_2^2 - C_4) = -(a_1^3a_2 - a_2^4)(b_1^4 + 8b_1b_2^3) - (a_1^4 + 8a_1a_2^3)(b_1^3b_2 - b_2^4),$$

$$D_6 = \frac{1}{770}(-5C_6 + 28A_2C_4 - 33A_2^3) = -(a_1^3a_2 - a_2^4)(b_1^3b_2 - b_2^4)(a_1^2b_1b_2 + a_1a_2b_1^2 - 2a_2^2b_2^2).$$

Nicht homogen geschrieben lautet das volle Formensystem

(38)

$$A_2 = (a-b)^2$$
$$D_3 = 8 + a^3 + 9a^2b + 9ab^2 + b^3 - a^3b^3$$
$$D_4 = (1-a^3)(8b+b^4) + (1-b^3)(8a+a^4)$$
$$D_6 = (1-a^3)(1-b^3)(2-a^2b-ab^2)$$

Zwischen diesen Formen besteht noch eine Identität, die man durch Polarisiren der aus $64F_1^3 + F_2^2 = F_3^3$ abgeleiteten Identität $64F_1^6 + F_1^3F_2^2 - F_1^3F_2^3 = 0$ erhält

2) $n \equiv -1$ modulo 3.

Wir haben in den Tetraederformen für $n \equiv +1$ nur b_1b_2 durch $-2b_2$, b_1 zu ersetzen (oder a_1, a_2 durch $-2a_2$, a_1), und erhalten so das Formensystem:

$$E_1 = a_1b_1 + 2a_2b_2;$$

Aus D_3: $$E_3 = a_1^3b_1^3 - 18a_1^2a_2b_1^2b_2 + 36a_1a_2^2b_1b_2^2 - 8a_2^3b_2^3 + 8a_1^3b_2^3 + 8a_2^3b_1^3;$$

Aus D_4: $$E'_4 = 8(a_1^3a_2 - a_2^4)(b_1^3b_2 - b_2^4) + (a_1^4 + 8a_1a_2^3)(b_1^4 + 8b_1b_2^3), \tag{39}$$

wofür wir einführen

$$E_4 = \tfrac{1}{2}(E_4' + E_1E_3) = (a_1^4 + 8a_1a_2^3)(b_1^4 + 8b_1b_2^3). \tag{39c}$$

Aus D_6 folgt ebenso eine Form E_6. Diese Form ändert jedoch bei Vertauschung von a und b ihren Wert (nicht blos das Vorzeichen). Schreiben wir die Modulargleichung, nach Potenzen der Form E_6 geordnet:

$$R(ab) = R_0(E_1E_3E_4) + E_6 . R_1(E_1E_3E_4) + E_6^2 . R_3(E_1E_3E_4) \ldots,$$

und vertauschen a und b, so soll $R(ba) = \pm R(ab)$ sein. Bilden wir also

$$R(ab) - R(ba) = [E_6(ab) - E_6(ba)]R_1 + [E_6^2(ab) - E_6^2(ba)]R_2 + \ldots,$$

so ist dies entweder gleich $2R(ab)$ oder gleich 0. Ersterenfalls enthielte aber $R(ab)$ den Factor $E_6(ab) - E_6(ba)$, was wegen der Irreducibilität von $R(ab)$ nicht angeht. Oder der obige Ausdruck ist gleich null. Dividirt man dann rechts durch $E_6(ab) - E_6(ba)$ was im allgemeinen sicher von null verschieden ist, so bleibt rechts ein ganzer, rationaler Ausdruck $(N-6)$ter Ordnung, der für alle vermöge der Transformation n. Ordnung zusammengehörigen Wertepaare a, b verschwindet; da aber die Modulargleichung von N. Ordnung sein soll, so kann nicht bereits ein Ausdruck $(N-6)$ter Ordnung, gleich null gesetzt, die Transformation kennzeichnen, dieser Ausdruck muss vielmehr identisch verschwinden, d. h. R_1, R_2 u. s. w. identisch null sein. Die Modulargleichung lautet daher einfach $R_0(E_1E_3E_4) = 0$, $E_1E_3E_4$ bilden das volle Formensystem $n \equiv -1 \bmod 3$ und es ist $R(ab) = +R(ba)$, da $E_1(ab) = E_1(ba)$, $E_3(ba) = E_3(ba)$ und $E_4(ab) = E_4(ba)$. Nicht homogen lautet das volle Formensystem:

$$\begin{aligned} E_1 &= 2 + ab, \\ E_3 &= 8 - 36ab + 18a^2b^2 - a^3b^3 - 8a^3 - 8b^3 \\ E_4 &= (8a + a^4)(8b + b^4). \end{aligned} \tag{40}$$

Behufs Bestimmung der noch unbestimmten Coefficienten in der Modulargleichung benutze man die Reihe [1])

$$a = -6q^{\frac{1}{4}}[1 - 5q^2 + 32q^4 - 198q^6 + 1214q^8 - 7445q^{10} \ ..]$$

Beispiele von Modulargleichungen sind

(41)

für $n = 2$: $E_1{}^3 + E_3 = 0$

$n = 4$: $D_6 - 32D_3{}^2 + 5.2^6 A_2 D_4 - 5^2.2^6.3^9 11 A_2{}^3 = 0$

$n = 5$: $(E_1{}^3 - E_3)^2 - 18^2 E_1{}^2 E_4 = 0$

$n = 7$: $(140A_2{}^2 - 27D_4)^2 + 27A_2(D_3{}^2 - 896D_6) - 12800A_2{}^3 = 0$

§ 15.

Die Oktaedermodulargleichungen.

1) $n = 1$ modulo 4.

Bei den hier in Betracht kommenden Substitutionen:

$$\text{A)} \quad o_1' = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}} o_1, \quad o_2' = 2\frac{1-i}{\sqrt{2}} o_2, \quad p_1' = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}} p_1,$$

$$p_2' = \pm\frac{1-}{\sqrt{2}} p_2$$

und

$$\text{B)} \quad o_1' = \pm\frac{1}{\sqrt{-2}}(-o_1 + o_2), \quad o_2' = \pm\frac{1}{\sqrt{-2}}(o_1 + o_2$$

$$p_1' = \pm\frac{1}{\sqrt{-2}}(-p_1 + p_2), \quad p_2' = \pm\frac{1}{\sqrt{-2}}(p_1 + p_2);$$

erhalten die Formen

$$F_1 = o_1{}^8 + 14 o_1{}^4 o_2{}^4 + o_2{}^8,$$
$$F_2 = o_1{}^{12} - 33 o_1{}^8 o_2{}^4 - 33 o_1{}^4 o_2{}^8 + o_2{}^{12},$$
$$F_3 = o_1 o_2 (o_1{}^4 - o_2{}^4)$$

respective die Factoren 1, −1, 1 und 1, −1, −1. Die niedrigsten in Betracht kommenden Formen sind daher F_1, $F_2{}^2$, $F_3{}^2$, von denen noch $F_2{}^2 = F_1{}^3 - 108F_3{}^4$ durch die andern darstellbar ist. Das volle Formensystem lautet daher:

1) $A_2 = (o_1 p_2 - o_2 p_4)^2$,

2) Die vierte Polare von F_1,

---

1) Man vergleiche z. B. Ikosaeder u. s. w. pg. 133. oder Annalen XIV pg. 157.

$$D_4 = 5o_1^4p_1^4 + o_1^4p_2^4 + 16o_1^3o_2p_1p_2^3 + 36o_1^2o_2^2p_1^2p_2^2 + 16o_1o_2^3p_1^3p_2 + o_2^4p_1^4 + 5o_2^4p_2^4 \quad (42)$$

3) Die sechste Polare von F_3^2.

Sei diese mit C_6 bezeichnet, ebenso die dritte Polare von F_3 mit C_3, so ist zufolge Gleichung (22):

$$C_3^2 = C_6 + \alpha(op)^2 . C_4 + \beta(op)^6$$

(α, β Zahlenfactoren). Daher führen wir anstelle von C_6 ein:

$$D_6 = C_3^2 = (o_1p_2 + o_2p_1)^2(o_1^2p_1^2 - o_2^2p_2^2)^2 \quad (42b)$$

Nichthomogen lautet das volle Formensystem:

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= (o-p)^2 \\ D_4 &= 5o^4p^4 + o^4 + 16o^3p + 36o^2p^2 + 16op^3 + p^4 + 5 \\ D_6 &= (o+p)^2(1-o^2p^2)^2 \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Hieraus folgt das volle Formensystem $n \equiv -1 \bmod 4$, indem p_1, p_2 durch p_2, $-p_1$ ersetzt werden; es lautet:

(44)

$$E_1 = o_1p_1 + o_2p_2$$

$$E_4 = o_1^4p_1^4 - 16o_1^3o_2p_1^3p_2 + 36o_1^2o_2^2p_1^2p_2^2 - 16o_1o_2^3p_1p_2^3 + o_2^4p_2^4 + 5o_1^4p_2^4 + 5o_2^4p_1^4$$

$$E_6 = (o_1p_1 - o_2p_2)^2(o_1^2p_2^2 - o_2^2p_1^2)^2.$$

Nichthomogen:

$$\begin{aligned} E_1 &= 1 + op \\ E_4 &= 1 - 16op + 36o^2p^2 - 16o^3p^3 + o^4p^4 + 5o^4 + 5p^4 \quad (45) \\ E_6 &= (1-op)^2(o^2-p^2)^2. \end{aligned}$$

Was Reihenentwickelungen für o betrifft, so beachte man, dass

$$o_I = \sqrt[4]{\lambda_B(2\omega)}$$

Nun war

$$\lambda_B(\omega) = 16\left(\frac{q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{3}{2}} + \dots}{1 + 2q + 2q^4 \dots}\right)^4,$$

also ist

$$\begin{aligned} o_I(\omega) &= 2\,\frac{q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{9}{2}} + \dots}{1 + 2q^2 + 2q^8 \dots} \\ &= 2q^{\frac{1}{2}}[1 - 2q^2 + 5q^4 - 10q^6 + 18q^8 - 32q^{10} + 55q^{12} \dots]\ ^1) \quad (46) \end{aligned}$$

---

1) Man vergleiche etwa Ikosaeder pg. 132, oder Annalen XIV. p. 157, oder endlich bei Sohncke, Crelle's Journal 16, pg. 133.

Beispiele.

$$n = 3 \quad E_1^4 - E_4 = 0 \tag{47a}$$

ausgerechnet:

$$o^4 + p^4 - 4o^3p^3 + 6o^2p^2 - 4op = 0.$$

$$n = 5 \quad 20D_6 - 4A_2D_4 - A_2^3 = 0 \tag{47b}$$

ausgerechnet:

$$16op(1+o^4p^4) - (o^6 + 10o^5p + 15o^4p^2 - 20o^3p^3 + 15o^2p^4 + 10op^5 + p^6 = 0.$$

$$n = 7 \quad 79E_1^8 - 78E_1^4E_4 - E_4^2 + 400E_1^2E_6 = 0,$$

ausgerechnet:

$$\left.\begin{array}{l} o^8 + p^8 + 28op(o^4 + p^4)(2o^2p^2 + 5op + 2) \\ -16op(4o^6p^6 + 8o^5p^5 + 7o^4p^4 + 7o^2p^2 + 8op + 4) + 100o^4p^4 \end{array}\right\} = 0 \tag{47c}$$

Die Gleichungen für o sind identisch mit denen für $\sqrt{\varkappa}$, wie sie sich z. B. für $n = 3$ und $n = 5$ bei Cayley finden (Philosophical Transactions 165, pg. 451).

§ 16.

Die Ikosaedermodulargleichungen.

$n \equiv +1$ modulo 5.

Die niedersten in Betracht kommenden Formen sind F_1, F_2, F_3 (vergl. Gleichung (3d)), und so lautet das volle Formensystem:

1) $A_2 = (\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1)^2$,

2) Die sechste Polare von F_3:

(48a)

$$\begin{aligned} D_6 = {} & 42(\eta_1\zeta_2 + \eta_2\zeta_1)(\eta_1^5\zeta_1^5 - \eta_2^5\zeta_2^5) + \eta_1^6\zeta_2^6 + 6^2\eta_1^5\eta_2\zeta_1\zeta^5{}_2 + 15^2\eta_1^4\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^4 \\ & + 20^2\eta_1^3\eta_2^3\zeta_1^3\zeta_2^3 + 15^2\eta_1^2\eta_2^4\zeta_1^4\zeta_2^2 + 6^2\eta_1\eta_2^5\zeta_1^5\zeta_2 + \eta_2^6\zeta_1^6. \end{aligned}$$

3) Die 10te Polare von F_1:

(48b)

$$\begin{aligned} D_{10} = {} & 22.17.(\eta_1^{10}\zeta_1^{10} + \eta_2^{10}\zeta_2^{10}) - 66(\eta_1^5\zeta_1^5 - \eta_2^5\zeta_2^5)(21\eta_1^5\zeta_2^5 + 175\eta_1^4\eta_2\zeta_1\zeta_2^4 \\ & + 450\eta_1^3\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^3 + 450\eta_1^2\eta_2^3\zeta_1^3\zeta_2^2 + 175\eta_1\eta_2^4\zeta_1^4\zeta_2 + 21\eta_2^5\zeta_1^5) \\ & + \eta_1^{10}\zeta_2^{10} + 10^2\eta_1^9\eta_2\zeta_1\zeta_2^9 + 45^2\eta_1^8\eta_2^2\zeta_1^2\zeta_2^8 + 120^2\eta_1^7\eta_2^3\zeta_1^3\zeta_2^7 \\ & + 210^2\eta_1^6\eta_2^4\zeta_1^4\zeta_2^6 + 252^2\eta_1^5\eta_2^5\zeta_1^5\zeta_2^5 + 210^2\eta_1^4\eta_2^6\zeta_1^6\zeta_2^4 \\ & + 120^2\eta_1^3\eta_2^7\zeta_1^7\zeta_2^3 + 45^2\eta_1^2\eta_2^8\zeta_1^8\zeta_2^2 + 10^2\eta_1\eta_2^9\zeta_1^9\zeta_2 + \eta_2^{10}\zeta_1^{10}. \end{aligned}$$

4) Die 15. Polare von F_2:

(47c)

$$D_{15}=\eta_1{}^{15}\zeta_1{}^{15}+\eta_2{}^{15}\zeta_2{}^{15}+(\eta_1{}^{10}\zeta_1{}^{10}-\eta_2{}^{10}\zeta_2{}^{10})(11\eta_1{}^5\zeta_2{}^5+75\eta_1{}^4\eta_2\zeta_1\zeta_2{}^4$$
$$+175\eta_1{}^3\eta_2{}^2\zeta_1{}^2\zeta_2{}^3+175\eta_1{}^2\eta_2{}^3\zeta_1{}^3\zeta_2{}^2+75\eta_1\eta_2{}^4\zeta_1{}^4\zeta_2+11\eta_2{}^5\zeta_1{}^5)$$
$$-(\eta_1{}^5\zeta_1{}^5+\eta_2{}^5\zeta_2{}^5)(\eta_1{}^{10}\zeta_2{}^{10}+25\eta_1{}^9\eta_2\zeta_1\zeta_2{}^9+225\eta_1{}^8\eta_2{}^2\zeta_1{}^2\zeta_2{}^8$$
$$+975\eta_1{}^7\eta_2{}^3\zeta_1{}^3\zeta_2{}^7+2275\eta_1{}^6\eta_2{}^4\zeta_1{}^4\zeta_2{}^6+3003\eta_1{}^5\eta_2{}^5\zeta_1{}^5\zeta_2{}^5$$
$$+2275\eta_1{}^4\eta_2{}^6\zeta_2{}^6\zeta_2{}^4+975\eta_1{}^3\eta_2{}^7\zeta_1{}^7\zeta_2{}^3+225\eta_1{}^2\eta_2{}^8\zeta_1{}^8\zeta_2{}^2$$
$$+25\eta_1\eta_2{}^9\zeta_1{}^9\zeta_2+\eta_2{}^{10}\zeta_1{}^{10}).$$

Ihr Quadrat ist rational ausdrückbar durch A_2, D_6, D_{10}, und hat man, um dies einzusehen, die Identität $F_2{}^2=1728F_3{}^5-F_1{}^3$ dreissigmal polarisirt zu denken.

Ist $n\equiv -1$ modulo 5,

so ist in den ebenangeführten Formen nur $\zeta_1\zeta_2$ zu ersetzen durch ζ_2, $-\zeta_1$, und lautet das volle Formensystem:

(48)

$$E_1=\eta_1\zeta_1+\eta_2\zeta_2;$$

$$E_6=42(\eta_1\zeta_1-\eta_2\zeta_2)(\eta_1{}^5\zeta_2{}^5+\eta_2{}^5\zeta_1{}^5)-\eta_1{}^6\zeta_1{}^6+6^2\eta_1{}^5\eta_2\zeta_1{}^5\zeta_2\ \ldots;$$
$$E_{10}=22.17(\eta_1{}^{10}\zeta_2{}^{10}+\eta_2{}^{10}\zeta_1{}^{10})+66(\eta_1{}^5\zeta_2{}^5+\eta_2{}^5\zeta_1{}^5)(21\eta_1{}^5\zeta_1{}^5$$
$$-175\eta_1{}^4\eta_2\zeta_1{}^4\zeta_2\ldots)+\eta_1{}^{10}\zeta_1{}^{10}-10^2\eta_1{}^9\eta_2\zeta_1{}^9\zeta_2+45^2\eta_1{}^8\eta^2\zeta_1{}^8\zeta_2\mp\ \ldots.$$

$$E_{15}=D_{15}(\eta_1,\ \eta_2,\ \zeta_2,\ -\zeta_1).$$

Zwischen diesen Formen besteht wieder, analog wie bei $n\equiv +1$, eine Identität.

Im Falle $n\equiv 2$ modulo 5 hatten wir gefunden:

$$\varphi=\eta_1{}^3\zeta_1{}^2\zeta_2+\eta_1{}^2\eta_2\zeta_2{}^3+\eta_1\eta_2{}^2\zeta_1{}^3-\eta_2{}^3\zeta_1\zeta_2{}^2;$$

$$\psi=-\eta_1{}^4\zeta_1\zeta_2{}^3+\eta_1{}^3\eta_2\zeta_1{}^4+3\eta_1{}^2\eta_2{}^2\zeta_1{}^2\zeta_2{}^2-\eta_1\eta_2{}^3\zeta_2{}^4+\eta_2{}^4\zeta_1{}^3\zeta_2;$$

$$\chi=\eta_1{}^5\zeta_1{}^5+\eta_1{}^5\zeta_2{}^5-\eta_2{}^5\zeta_1{}^5+\eta_2{}^5\zeta_2{}^5+10\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2(-\eta_1{}^3\zeta_1{}^2\zeta_2+\eta_1{}^2\eta_2\zeta_2{}^3$$
$$+\eta_1\eta_2{}^2\zeta_1+\eta_2{}^3\zeta_1\zeta_2{}^2).$$

Endlich im Falle $n=-2$ modulo 5:

$$\varphi_1=\eta_1{}^3\zeta_1\zeta_2{}^2+\eta_1{}^2\eta_2\zeta_1{}^3-\eta_1\eta_2{}^2\zeta_2{}^3+\eta_2{}^3\zeta_1{}^2\zeta_2;$$

$$\psi_1=\eta_1{}^4\zeta_1{}^3\zeta_2+\eta_1{}^3\eta_2\zeta_2{}^4+3\eta_1{}^2\eta_2{}^2\zeta_1{}^2\zeta_2{}^2-\eta_1\eta_2{}^3\zeta_1{}^4-\eta_2{}^4\zeta_1\zeta_2{}^3;$$

$$\chi_1=\eta_1{}^5\zeta_1{}^5-\eta_1{}^5\zeta_2{}^5+\eta_2{}^5\zeta_1{}^5+\eta_2{}^5\zeta_2{}^5$$
$$-10\eta_1\eta_2\zeta_1\zeta_2(\eta_1{}^3\zeta_1{}^2\zeta_2+\eta_1{}^2\eta_2\zeta_1{}^3+\eta_1\eta_2{}^2\zeta_2{}^3-\eta_2{}^3\zeta_2{}^2\zeta_2).$$

Für die numerische Berechnung der noch unbestimmten Coefficienten bedienen wir uns der folgenden Reihe [1])

$$\eta = q_5^{\frac{2}{5}} \frac{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^x q^{5x^2-3x}}{\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^x q^{5x^2-x}}. \tag{49}$$

Beispiele.

(50)

$n = 2$: $\varphi = 0$

$n = 3$: $\psi_1 = 0$

$n = 4$ [2]): $E_1^6 - E_6 = 0$

$n = 6$: $11.17 D_6^2 - 18.49 A_2 D_{10} + 121.16 A_2^3 D_6 - 17.73 A_2^6 = 0$

$n = 7$: $\psi^2 - \varphi\chi = 0$

$n = 8$: $\varphi_1^4 + \varphi_1\psi_1\chi_1 - \psi_1^3 = 0$

$n = 9$: $11.17 E_6^2 + 6.49 E_1^2 E_{10} + 11.16.53 E_1^6 E_6 - 17.577 E_1^{12} = 0$

$n = 11$: $11.17 D_6^2 - 18.49 A_2 D_{10} - 11.8.335 A_2^3 D_6 - 17.75841 A_2^6 = 0$

$n = 13$: $\varphi_1^3\chi_1 = \varphi_1^2\psi_1^2 + \psi_1\chi_1^2 = 0.$

---

1) Man vergleiche Ikosaeder, p. 132, oder Annalen XIV, pg. 157 ff.

2) Die Gleichungen für $n = 2, 3, 4$ sind bereits Annalrn XIV, pg. 163 mitgeteilt.

Inhalt.

Einleitung 1

Capitel I.

Galois'sche Hauptmoduln der 2. bis 5. Stufe.

§ 1. Die modulo ϱ zur Identität congruenten Substitutionen und ihr Fundamentalpolygon 3
§ 2. Die zugehörigen Hauptmoduln der 2. bis 5. Stufe 7
§. 3. Weitere Discussion und Aufstellung der Definitionsgleichungen für diese Moduln 9
§ 4. Genauerer Verfolg der vier einzelnen Modulfunctionen . 16
§ 5. Modulformen 25

Capitel II.

Die Modulargleichungen der Galois'schen Hauptmoduln der zweiten bis fünften Stufe.

§ 6. Transformation n. Ordnung, Repräsentanten 31
§ 7. Die zugehörigen Modulargleichungen 35
§ 8. Die Substitutionen der Modulargleichungen in sich . . . 38
§ 9. Zuordnung der Simultansubstitutionen 41
§ 10. Die Fälle $n \equiv +1$ modulo ϱ 44
§ 11. Die Fälle $n \equiv -1$ modulo ϱ 50
§ 12. Die Fälle $n \equiv \pm 2$ modulo 5 54

Capitel III.

Wirkliche Aufstellungen der Modulargleichungen.

§ 13. Die Doppelverhältnissmodulargleichungen 58
§ 14. Die Tetraedermodulargleichungen 64
§ 15. Die Oktaedermodulargleichungen 67
§ 16. Die Ikosaedermodulargleichungen 69

Fig. 1.

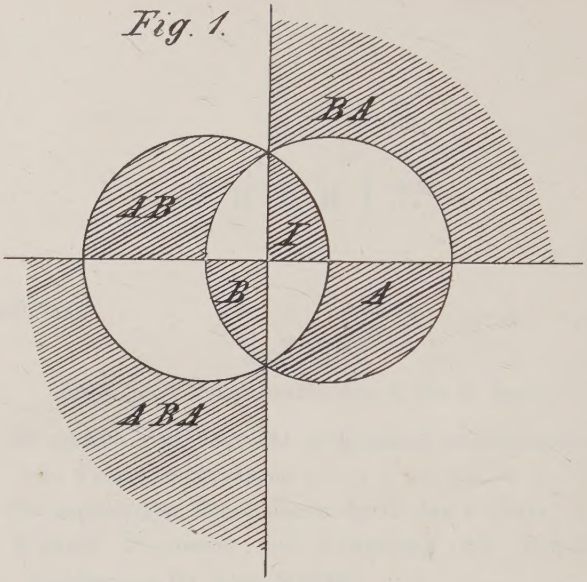
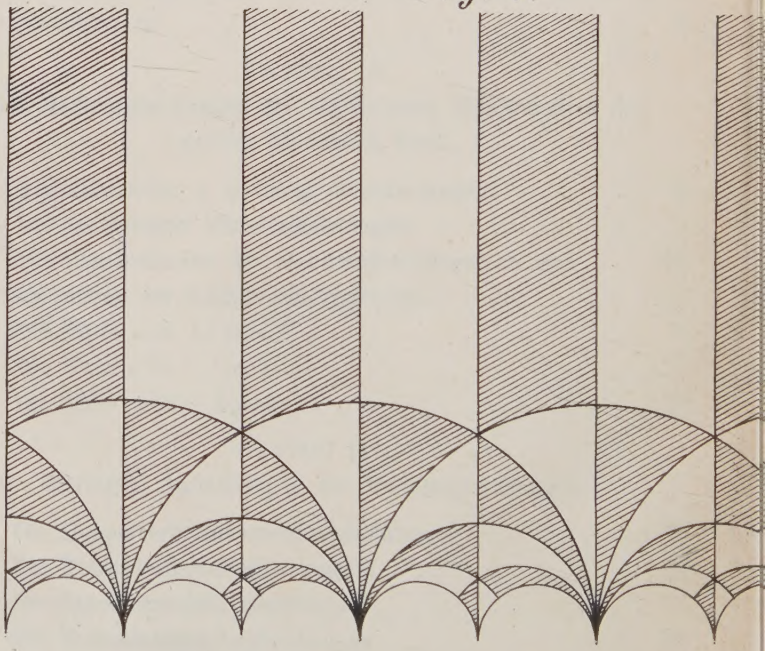


Fig. 4.



2.

Fig. 3.

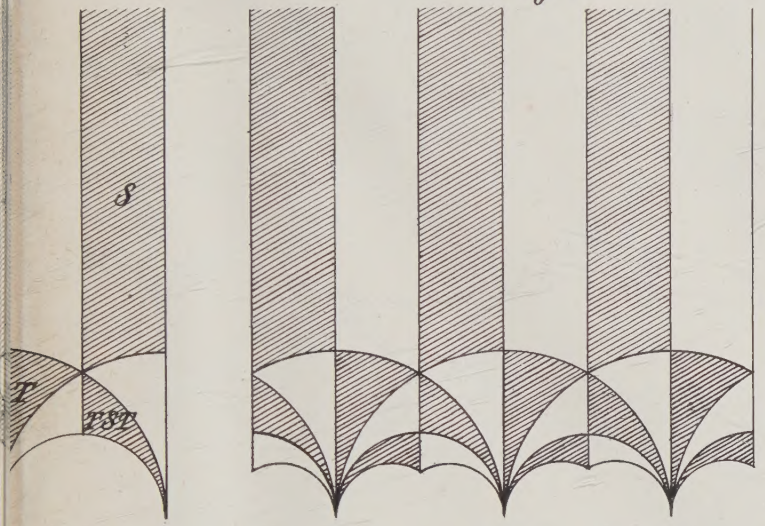
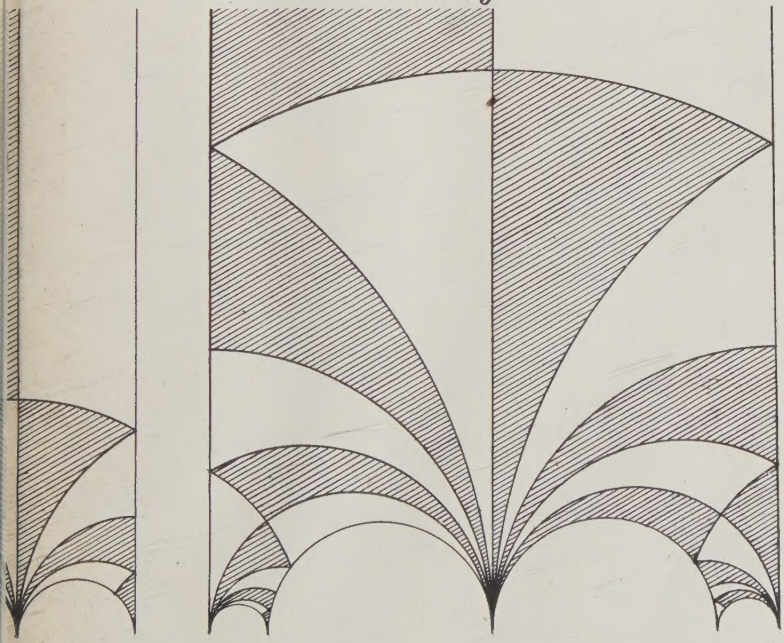


Fig. 5.



Steindr. v. F. W. Kunike, Greifsw.